Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematatik II für Wirtschaftswissenschaftler

Leipzig, den 17.6.2021

Ergänzungen und Beispiele zu den Kapiteln 2.1 bis 2.6 – Analysis in mehreren Variablen

Wir behandeln in dieser Rubrik weitere Beispiele zur Berechnung der *Jacobi-Matrix* sowie Anwendungen der Kettenregel.

I) Wir erinnern zunächst an die *hyperbolischen Funktionen* $cosh$, $sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch:

$$cosh(t) := \frac{1}{2} \cdot (e^t + e^{-t}),\ sinh(t) := \frac{1}{2} \cdot (e^t - e^{-t}).$$

Diese beiden Funktionen sind – unendlich oft – differenzierbar, und für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt:

$$cosh'(t) = sinh(t),\ sinh'(t) = cosh(t).$$

Wir definieren nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(r,t) = \begin{pmatrix} f^1(r,t) \\ f^2(r,t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot cosh(t) \\ r \cdot sinh(t) \end{pmatrix}.$$

f ist überall auf $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar, und für alle $r, t \in \mathbb{R}$ folgt:

$$df(r,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(r,t)}{\partial r} & \frac{\partial f^1(r,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial f^2(r,t)}{\partial r} & \frac{\partial f^2(r,t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh(t) & r \cdot sinh(t) \\ sinh(t) & r \cdot cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Interessant ist hier auch noch:

$$det(df(r,t)) = r \cdot (cosh^2(t) - sinh^2(t)) = r \text{ für alle } r, t \in \mathbb{R}.$$

In Analogie zu Aufgabe 40.), in der es um die Polarkoordinaten geht – und die hier auftretenden Funktionen $cosh$ und $sinh$ durch die üblichen trigonometrischen Funktionen cos und sin ersetzt sind, spricht man vorliegend auch von *hyperbolischen Koordinaten.* – Um Injektivität zu erzwingen, muss aber $r \neq 0$ gefordert werden; häufig werden hier auch nur Werte $r > 0$ betrachtet.
Für festes $r \neq 0$ durchlaufen die Funktionswerte $f(r,t)$ den Zweig einer *Hyperbel.* Für je zwei verschiedene solche $r_1, r_2 \neq 0$ sind diese Zweige auch disjunkt.

II) Nun möchten wir auch noch die – dreidimensionalen – *Kugelkoordinaten* studieren. Dazu definieren wir – zunächst wieder allgemein – die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$g(r, \varphi, \theta) := \begin{pmatrix} r \cdot cos(\varphi) \cdot sin(\theta) \\ r \cdot sin(\varphi) \cdot sin(\theta) \\ r \cdot cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Auch hier wird – um Injektivität zu erlangen – meist gefordert: $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, $\theta \in]0, \pi[$.
Unter diesen Restriktionen durchlaufen die Funktionswerte $g(r, \varphi, \theta)$ alle Punkte des Anschauungsraums $\mathbb{R}^3$ außer der x_3-Achse. – Genauer durchlaufen die Punkte $g(r, \varphi, \theta)$ für fixiertes $r > 0$ und fixiertes $\theta \in]0, \pi[$, aber variierendes $\varphi \in [0, 2\pi[$ alle Punkte auf dem

$$\textit{horizontalen} \text{ Kreis mit Mittelpunkt } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cdot cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ und Radius } r \cdot sin(\theta).$$

Betrachten wir die Erde als kugelförmig (was natürlich nicht exakt stimmt), so gibt φ die geographische Länge und θ die geographische Breite eines Punktes der Erdoberfläche – im Bogenmaß – an, wenn dieser vom Nordpol und vom Südpol verschieden ist. Den beiden Polen wird keine geographische Länge zugeordnet.

Die gegebene Funktion g ist überall auf $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar, und wir erhalten für alle $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3$:

$$dg(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} cos(\varphi) \cdot sin(\theta) & -r \cdot sin(\varphi) \cdot sin(\theta) & r \cdot cos(\varphi) \cdot cos(\theta) \\ sin(\varphi) \cdot sin(\theta) & r \cdot cos(\varphi) \cdot sin(\theta) & r \cdot sin(\varphi) \cdot cos(\theta) \\ cos(\theta) & 0 & -r \cdot sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

III) Nun kommen wir noch zur Kettenregel für Funktionen in mehreren Variablen. Die ist insbesondere für solche Kompositionen $f \circ \chi$ interessant, für die $\chi : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Teilintervall von $\mathbb{R}$ definiert ist und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion ist. Dann ist $f \circ \chi : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall definierte reelle Funktion, auf die also auch die Methoden der Analysis in einer Variablen angewendet werden können!

Uns interessieren nun insbesondere *stetig differenzierbare Kurven* $\chi : I \to \mathbb{R}^n$; das sind Abbildungen der Gestalt

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_n(t) \end{pmatrix},$$

für die alle Funktionen χ_i für $1 \leq i \leq n$ stetig differenzierbar sind und der Ableitungsvektor

$$\chi'(t) = \begin{pmatrix} \chi_1'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_n'(t) \end{pmatrix}$$

überall vom Nullvektor verschieden ist; dann wird dieser Vektor auch *Tangentialvektor* an der Stelle t genannt. Er gibt die Richtung der *Tangente* an die Kurve an; diese besteht – für fixiertes $t \in I$ – aus den Punkten der Gestalt

$$\chi(t) + \lambda \cdot \chi'(t) \text{ für variierendes } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ist nun weiter $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall total differenzierbar, so liefert die Kettenregel – in Satz 2.13, dass für alle $t \in I$ und $u := \chi(t)$ gilt:

$$(f \circ \chi)'(t) = \bigtriangledown f(u) \bullet \chi'(t).$$

Ist speziell – für festes $c \in \mathbb{R}$ – das Bild $\chi(I)$ in der Niveaumenge von f zum Niveau c enthalten, so bedeutet das gemäß Definition 2.23: $(f \circ \chi)(t) = c$ für alle $t \in I$. Mit anderen Worten folgt dann: Die Komposition $f \circ \chi$ ist konstant, und das bedeutet – mit $u = \chi(t)$:

$$\bigtriangledown f(u) \bullet \chi'(t) = (f \circ \chi)'(t) = 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Diese Gleichung erklärt die in Satz 2.11 aufgestellte Behauptung, dass der Gradient einer differenzierbaren Funktion f stets senkrecht auf den Niveaumengen von f steht.

Wir betrachten dazu noch speziell folgendes

Beispiel: Definiere $f : B_1(0,0) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Aus dem Satz von Pythagoras folgt, dass der Graph von f die obere Hälfte der – dreidimensionalen – Kugel mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius 1 ist.

Weiter fixieren wir ein $r \in]0,1[$ und definieren $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch $\chi(t) := \begin{pmatrix} r \cdot cos(t) \\ r \cdot sin(t) \end{pmatrix}$.

Dann folgt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$(f \circ \chi)(t) = \sqrt{1 - r^2 \cdot (cos^2(t) + sin^2(t))} = \sqrt{1 - r^2}.$$

Weil $r \in]0,1[$ fixiert wurde, ist also die Komposition $f \circ \chi$ konstant. Folglich ist $(f \circ \chi)'(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Nach der Kettenregel bedeutet das für $(x,y) = \chi(t)$:

$$\triangledown f(x,y) \bullet \chi'(t) = 0.$$

Das folgt schließlich auch durch direkte Verifikation:

$$\begin{aligned} \triangledown f(x,y) \bullet \chi'(t) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot r \cdot (-sin(t)) - \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot r \cdot cos(t) \\ &= \frac{r^2 \cdot cos(t) \cdot sin(t)}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r^2 \cdot sin(t) \cdot cos(t)}{\sqrt{1-r^2}} = 0. \end{aligned}$$