Drei Anwendungen der Eulerschen Polyederformel

Kapitel 12

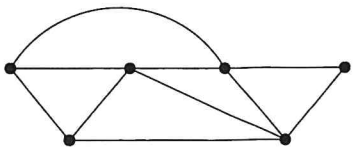
Ein Graph ist *planar*, wenn er in die Ebene $\mathbb{R}^2$ gezeichnet werden kann ohne dass sich Kanten kreuzen (oder, äquivalent dazu, auf die Kugeloberfläche). Wir sprechen von *ebenen* Graphen, wenn eine solche Zeichnung schon gegeben ist. Die Zeichnung zerlegt dann die Ebene oder Sphäre in eine endliche Anzahl von zusammenhängenden *Gebieten*, wobei wir das äußere (unbeschränkte) Gebiet mitzählen. Die Eulersche „Polyederformel" liefert eine Beziehung zwischen der Anzahl der Ecken, Kanten und Gebiete, die für jeden ebenen Graphen gültig ist. Euler hat das Resultat zuerst in einem Brief an seinen Freund Goldbach 1750 erwähnt, aber er hatte damals keinen vollständigen Beweis dafür. Von den vielen Beweisen der Eulerschen Formel präsentieren wir hier einen hübschen „selbstdualen", der ohne Induktion auskommt. Er geht auf die „Geometrie der Lage" von Karl Georg Christian von Staudt (1847) zurück.

Leonhard Euler

Die Eulersche Polyederformel. *Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen G mit n Ecken, e Kanten und f Gebieten gilt*

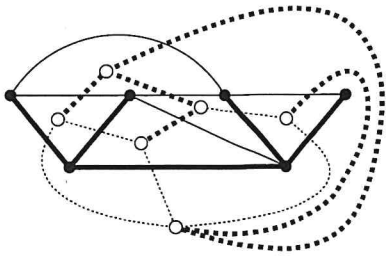
$$n - e + f = 2.$$

■ **Beweis.** Sei $T \subseteq E$ die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes für G, also eines minimalen Untergraphen, der alle Ecken von G verbindet. Dieser Graph enthält keinen Kreis wegen der Minimalitätsannahme.


Ein ebener Graph G: n=6, e=10, f=6

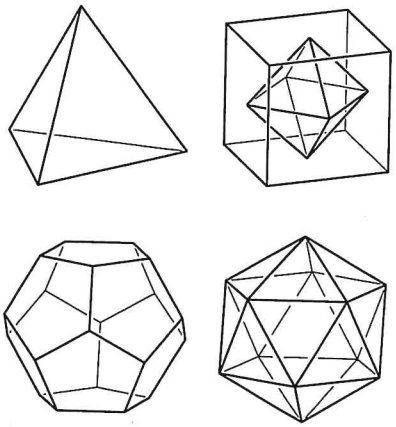
Jetzt brauchen wir den *Dualgraphen* G^* von G: Um ihn zu konstruieren, legen wir eine neue Ecke in jedes Gebiet von G und verbinden zwei solche Ecken von G^* durch Kanten, die die gemeinsame Randkante der entsprechenden Gebiete überqueren. Wenn es mehrere gemeinsame Randkanten gibt, dann zeichnen wir mehrere Verbindungskanten in den Dualgraphen ein. (Also kann G^* Mehrfachkanten haben, auch wenn der ursprüngliche Graph G einfach ist.)

Nun betrachten wir die Menge $T^* \subseteq E^*$ der Kanten im Dualgraphen, die den Kanten in $E \backslash T$ entsprechen. Die Kanten von T^* verbinden alle Gebiete, weil T keinen Kreis enthält; aber auch T^* enthält keinen Kreis, weil ansonsten einige Ecken von G innerhalb des Kreises von Ecken außerhalb des Kreises getrennt würden (und das kann nicht sein, weil T ein aufspannender Untergraph ist, und sich die Kanten von T und von T^* nicht kreuzen). Also ist T^* ein aufspannender Baum für G^*.


Duale aufspannende Bäume in G und in G^*

Für jeden Baum ist die Anzahl der Ecken um eins größer als die Anzahl der Kanten. Um dies zu sehen, wählen wir eine Ecke als die „Wurzel" aus, und geben allen Kanten eine Richtung „von der Wurzel weg": dies liefert

eine Bijektion zwischen den Kanten und der Menge aller Ecken außer der Wurzel, indem wir jeder Kante die Endecke zuordnen, zu der sie hinzeigt. Angewendet auf den Baum T ergibt dies $n = e_T + 1$, und für den Baum T^* liefert es $f = e_{T^*} + 1$. Wir addieren die beiden Gleichungen und erhalten $n + f = (e_T + 1) + (e_{T^*} + 1) = e + 2$. □

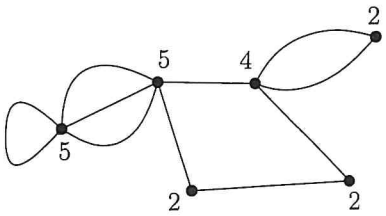


Die fünf platonischen Körper

Die Eulersche Formel liefert eine unerwartete *numerische* Beziehung zwischen den Elementen einer *geometrisch-topologischen* Struktur: die Anzahlen der Ecken, Kanten und Gebiete eines endlichen zusammenhängenden Graphen erfüllen $n - e + f = 2$ immer dann, wenn der Graph eben ist, oder in die Ebene oder auf eine Sphäre gezeichnet werden *kann*.

Aus der Eulerschen Formel können viele bekannte klassische Folgerungen abgeleitet werden. So erhält man daraus die Klassifikation der regulären konvexen Polyeder (die *platonischen Körper*), die Tatsache, dass K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar sind (siehe unten), und den Fünffarbensatz, der besagt, dass jede ebene Karte mit höchstens fünf Farben so eingefärbt werden kann, dass keine zwei benachbarten Gebiete dieselbe Farbe bekommen. Aber dafür haben wir einen viel besseren Beweis, für den man nicht einmal die Eulersche Formel braucht — siehe Kapitel 34.

In diesem Kapitel versammeln sich drei weitere elegante Beweise, für die die Eulersche Formel „des Pudels Kern" ist. Die ersten beiden, ein Beweis des Sylvester-Gallai-Satzes und ein Satz über zwei-gefärbte Punktkonfigurationen, verwenden die Eulersche Formel in schlauer Kombination mit anderen Beziehungen zwischen grundlegenden Graphenparametern. Deshalb sehen wir uns zunächst diese Parameter an.



Hier ist jede Ecke mit ihrem Grad bezeichnet. Zählen der Ecken anhand ihres Grades liefert $n_2 = 3$, $n_3 = 0$, $n_4 = 1$, $n_5 = 2$.

Der *Grad einer Ecke* einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von der Ecke ausgehen, wobei Schlingen doppelt zählen. Mit n_i bezeichnen wir die Anzahl der Ecken vom Grad i in G. Wenn wir die Ecken anhand ihres Grades zählen, so erhalten wir

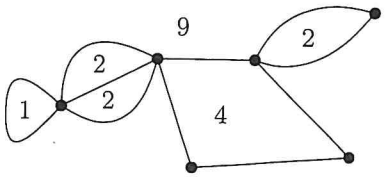
$$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + \dots \tag{1}$$

Andererseits hat jede Kante genau zwei Enden, sie trägt also 2 zur Summe aller Grade bei, und wir erhalten für diese Summe

$$2e = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots \tag{2}$$

Man kann diese Gleichung so interpretieren, dass hier auf zwei verschiedene Weisen die Enden der Kanten abgezählt werden, also die Kanten-Ecken-Inzidenzen. Der *Durchschnittsgrad* $\overline{d}$ der Ecken ist somit

$$\overline{d} = \frac{2e}{n}.$$



Hier ist jedes Gebiet mit der Anzahl der Seiten bezeichnet. Zählen der Gebiete mit gegebener Seitenzahl liefert $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, $f_4 = 1$, $f_9 = 1$, und $f_i = 0$ sonst.

Als Nächstes zählen wir die Gebiete eines ebenen Graphen in Abhängigkeit von ihrer Seitenzahl. Sei f_k die Anzahl der Gebiete, die durch k Kanten begrenzt werden (wobei wir eine Kante doppelt zählen, wenn sie auf beiden Seiten dasselbe Gebiet begrenzt). Durch Zählen aller Gebiete erhalten wir

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots \tag{3}$$

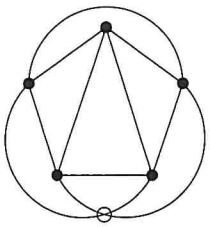
Abzählen der Kanten anhand der Gebiete, die sie begrenzen, liefert

$$2e = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \dots \tag{4}$$

Dies können wir wieder, wie vorher, als doppeltes Abzählen der Kanten-Gebiet-Inzidenzen interpretieren. Damit ist die durchschnittliche Seitenzahl der Gebiete gegeben durch

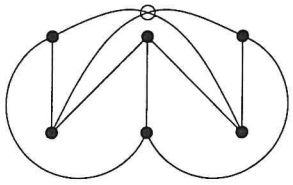
$$\overline{f} = \frac{2e}{f}.$$

Jetzt wollen wir daraus — unter Verwendung der Eulerschen Formel — schnell ableiten, dass der vollständige Graph K_5 und der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$ nicht planar sind. Für eine hypothetische ebene Darstellung von K_5 berechnen wir $n = 5$, $e = \binom{5}{2} = 10$, und damit $f = e + 2 - n = 7$ und $\overline{f} = \frac{2e}{f} = \frac{20}{7} < 3$. Aber wenn die durchschnittliche Seitenzahl kleiner als 3 ist, dann muss die Einbettung ein Gebiet haben, das durch höchstens zwei Seiten begrenzt wird, was nicht sein kann.



K_5 mit nur einer Kreuzung

Genauso erhalten wir für $K_{3,3}$, dass $n = 6$, $e = 9$, $f = e + 2 - n = 5$ und damit $\overline{f} = \frac{2e}{f} = \frac{18}{5} < 4$ ist, was auch nicht stimmen kann, weil $K_{3,3}$ einfach und bipartit ist, also alle seine Kreise mindestens Länge 4 haben.



$K_{3,3}$ mit nur einer Kreuzung

Es ist natürlich kein Zufall, dass die Gleichungen (3) und (4) für die f_is den Gleichungen (1) und (2) für die n_is so ähnlich sehen. Sie gehen ineinander über, wenn wir die Dualgraph-Konstruktion $G \to G^*$ durchführen.

Aus den durch doppeltes Abzählen gewonnen Identitäten leiten wir jetzt die folgenden „lokalen" Schlußfolgerungen aus der Eulerschen Formel ab.

Proposition. *Sei G ein einfacher, ebener Graph mit $n > 2$ Ecken. Dann gilt:*

(A) *G hat höchstens $3n - 6$ Kanten.*

(B) *G hat eine Ecke vom Grad höchstens 5.*

(C) *Wenn die Kanten von G zwei-gefärbt werden, dann gibt es eine Ecke von G mit höchstens zwei Farbwechseln in der zyklischen Ordnung der Kanten um die Ecke herum.*

■ **Beweis.** Für jede der drei Aussagen können wir annehmen, dass G zusammenhängend ist.

(A) Jedes Gebiet wird durch mindestens drei Kanten begrenzt (weil G einfach ist). Also liefern (3) und (4)

$$\begin{aligned} f &= f_3 + f_4 + f_5 + \dots \\ 2e &= 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots, \end{aligned}$$

und damit $2e - 3f \geq 0$.

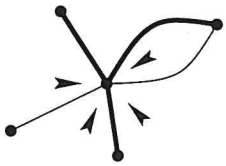
Aus der Eulerschen Formel schließen wir nun

$$3n - 6 = 3e - 3f \geq e.$$

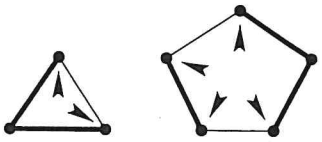
(B) Aus Teil (A) erhalten wir für den Durchschnittsgrad $\overline{d}$ die Abschätzung

$$\overline{d} = \frac{2e}{n} \leq \frac{6n-12}{n} < 6.$$

Also muss es eine Ecke vom Grad höchstens 5 geben.



Pfeilspitzen zeigen hier in die Winkel zwischen verschiedenfarbigen Kanten.



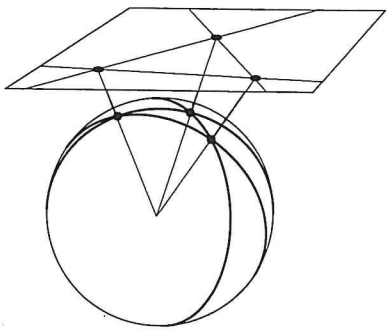
(C) Sei c die Anzahl der „Winkel", die von verschiedenfarbigen Kanten gebildet werden. Nehmen wir an, dass die Aussage falsch ist, dann gibt es $c \geq 4n$ solche Winkel, weil es an jeder Ecke ja eine gerade Anzahl von Farbwechseln geben muss. Ein Gebiet mit $2k$ oder $2k+1$ Kanten hat höchstens $2k$ solche Winkel mit Farbwechsel, und daraus schließen wir

$$\begin{aligned} 4n \leq c &\leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + \ldots \\ &\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + 10f_7 + \ldots \\ &= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + \ldots) \\ &\quad -4(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \ldots) \\ &= 4e - 4f, \end{aligned}$$

wobei wir wieder (3) und (4) verwendet haben. Also folgt $e \geq n + f$, was abermals der Eulerschen Formel widerspricht. □

1. Noch einmal: der Sylvester-Gallai-Satz

Offenbar hat Norman Steenrod als Erster bemerkt, dass Teil (B) der Proposition einen überraschend einfachen Beweis des Sylvester-Gallai-Satzes aus Kapitel 10 liefert.



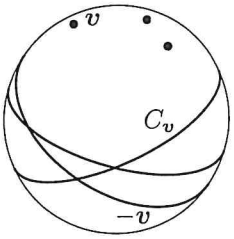
Der Sylvester-Gallai-Satz. *Wenn $n \geq 3$ Punkte in der Ebene nicht alle auf einer Geraden liegen, dann gibt es eine Gerade, die genau zwei der Punkte enthält.*

■ **Beweis.** Wenn wir die Ebene $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ nahe der Einheitssphäre S^2 einbetten, wie das in der Zeichnung angedeutet ist, dann entspricht jedem Punkt im $\mathbb{R}^2$ ein Paar von gegenüberliegenden Punkten auf der S^2, und die Geraden im $\mathbb{R}^2$ entsprechen Großkreisen auf der S^2.

Damit ist der Sylvester-Gallai-Satz zur folgenden Aussage äquivalent:

Wenn $n \geq 3$ Paare von einander gegenüberliegenden Punkten auf der Sphäre gegeben sind, die nicht alle auf einem Großkreis liegen, dann gibt es immer einen Großkreis, der genau zwei der Punktepaare enthält.

Nun dualisieren wir, indem wir jedes Paar von gegenüber liegenden Punkten durch den entsprechenden Großkreis auf der Sphäre ersetzen. Das heißt, statt der Punkte $\pm v \in S^2$ betrachten wir nun die orthogonalen Kreise, die durch $C_v := \{x \in S^2 : \langle x, v \rangle = 0\}$ gegeben sind. (Dieses C_v ist der Äquator, wenn wir v als Nordpol der Sphäre interpretieren.)



Damit müssen wir für das Sylvester-Gallai-Problem das Folgende beweisen:

Wenn $n \geq 3$ Großkreise auf der S^2 gegeben sind, die nicht alle durch einen Punkt gehen, dann gibt es immer einen Punkt, der auf genau zweien der Großkreise liegt.

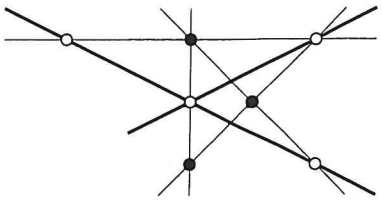
Aber das Arrangement von Großkreisen liefert einen ebenen Graphen auf der S^2: seine Ecken entsprechen den Schnittpunkten dieser Großkreise, und die Kanten den Großkreisabschnitten zwischen je zwei Schnittpunkten.

Alle Eckengrade des Graphen sind gerade, und sie sind alle mindestens 4, nach Konstruktion. Also liefert Teil (B) der Proposition die Existenz einer Ecke vom Grad 4. Das ist alles! □

2. Einfarbige Geraden

Der folgende Beweis einer „farbigen" Variation des Sylvester-Gallai-Satzes stammt von Don Chakerian.

Satz. *Wenn endlich viele „schwarze" und „weiße" Punkte in der Ebene gegeben sind, die nicht alle auf einer Geraden liegen, dann gibt es immer eine „einfarbige" Gerade: eine Gerade, die mindestens zwei Punkte einer Farbe enthält und keine der anderen Farbe.*



■ **Beweis.** Wie zuvor für das Sylvester-Gallai-Problem übersetzen wir das Problem auf die Einheitssphäre und dualisieren es dort. Also müssen wir beweisen:

Für jede endliche Menge von „schwarzen" und „weißen" Großkreisen auf der Einheitssphäre, die nicht alle durch einen Punkt gehen, gibt es einen Schnittpunkt, der entweder nur auf weißen Großkreisen liegt oder nur auf schwarzen Großkreisen.

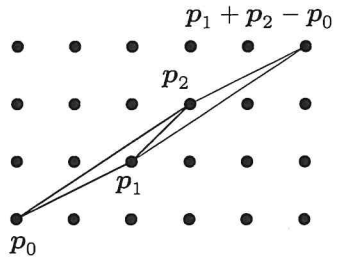
Hier folgt die (positive) Antwort aus Teil (C) der Proposition, weil es in jeder Ecke, in der sich Großkreise verschiedener Farbe schneiden, immer mindestens 4 Winkel mit Farbwechseln gibt. □

3. Der Satz von Pick

Der Satz von Pick aus dem Jahr 1899 ist ein wunderschönes und überraschendes Resultat, er ist aber auch eine „klassische" Folgerung aus der Eulerschen Formel.

Im Folgenden nennen wir ein konvexes Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ *elementar*, wenn seine Ecken ganzzahlig sind, es aber keine weiteren ganzzahligen Punkte enthält.

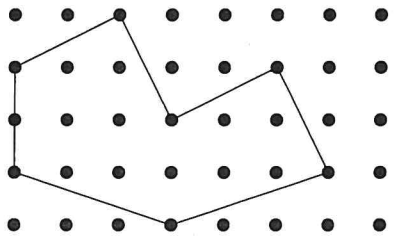
Lemma. *Jedes elementare Dreieck* $\Delta = \operatorname{conv}\{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *hat die Fläche* $A(\Delta) = \frac{1}{2}$.



■ **Beweis.** Sowohl das Parallelogramm P mit den Ecken p_0, p_1, p_2 und $p_1 + p_2 - p_0$ als auch das Gitter $\mathbb{Z}^2$ sind symmetrisch bezüglich der Abbildung

$$\sigma : x \longmapsto p_1 + p_2 - x,$$

der Spiegelung im Mittelpunkt der Strecke von p_1 nach p_2. Damit ist das Parallelogramm $P = \Delta \cup \sigma(\Delta)$ auch elementar, und seine ganzzahligen Translate pflastern die Ebene. Also ist $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0\}$ eine Basis des Gitters $\mathbb{Z}^2$, hat daher Determinante ± 1, das Parallelogramm P hat Fläche 1, und Δ hat Fläche $\frac{1}{2}$. (Der Kasten unten liefert eine Erklärung dieser Begriffe.) □



$n_{in} = 11$, $n_{rd} = 8$, also $A = 14$

Der Satz von Pick. *Die Fläche eines (nicht notwendigerweise konvexen) Polygons* $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ *mit ganzzahligen Ecken ist durch*

$$A(Q) = n_{in} + \tfrac{1}{2} n_{rd} - 1$$

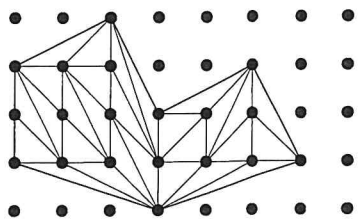
gegeben, wobei n_{in} *und* n_{rd} *die Anzahlen der ganzzahligen Punkte im Inneren bzw. auf dem Rand von* Q *sind.*

Gitterbasen

Eine *Basis* des $\mathbb{Z}^2$ ist ein Paar von linear unabhängigen Vektoren e_1, e_2, so dass

$$\mathbb{Z}^2 = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\}$$

ist. Seien $e_1 = \binom{a}{b}$ und $e_2 = \binom{c}{d}$, dann ist die Fläche des Parallelogramms, das durch e_1 und e_2 aufgespannt wird, gleich $A(e_1, e_2) = |\det(e_1, e_2)| = |\det \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)|$. Wenn $f_1 = \binom{r}{s}$ und $f_2 = \binom{t}{u}$ eine andere Basis bilden, dann gibt es eine umkehrbare ganzzahlige Matrix Q mit $\left(\begin{smallmatrix} r & t \\ s & u \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) Q$. Weil $QQ^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt und die Determinanten ganzzahlig sind, folgt daraus $|\det Q| = 1$ und damit $|\det(f_1, f_2)| = |\det(e_1, e_2)|$. Also haben alle Basisparallelogramme dieselbe Fläche 1, da $A\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right) = 1$ ist.



■ **Beweis.** Jedes solche Polygon besitzt eine Triangulierung, die alle n_{in} Gitterpunkte im Inneren verwendet, und alle n_{rd} Gitterpunkte auf dem Rand von Q. (Das ist nicht ganz offensichtlich, insbesondere weil wir ja gar nicht annehmen, dass Q konvex sein muss, aber im Kapitel 35 über das Museumswächterproblem wird dies bewiesen.)

Nun interpretieren wir die Triangulierung als einen ebenen Graphen, der die Ebene in ein unbegrenztes Gebiet plus $f-1$ Dreiecke der Fläche $\frac{1}{2}$ unterteilt, so dass also

$$A(Q) = \tfrac{1}{2}(f-1)$$

gilt. Jedes Dreieck hat drei Seiten, wobei jede der e_{in} inneren Kanten zwei Dreiecke begrenzt, wohingegen die e_{rd} Randkanten nur für je ein Dreieck verwendet werden. Also gilt $3(f-1) = 2e_{in} + e_{rd}$ und damit $f = 2(e-f) - e_{rd} + 3$. Weiterhin verwenden wir, dass das Polygon die gleiche Anzahl von Randkanten und -ecken hat, also $e_{rd} = n_{rd}$. Diese Gleichungen liefern zusammen mit der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} f &= 2(e-f) - e_{rd} + 3 \\ &= 2(n-2) - n_{rd} + 3 = 2n_{in} + n_{rd} - 1, \end{aligned}$$

und damit

$$A(Q) = \tfrac{1}{2}(f-1) = n_{in} + \tfrac{1}{2}n_{rd} - 1. \qquad \square$$

Literatur

[1] G. D. CHAKERIAN: *Sylvester's problem on collinear points and a relative,* Amer. Math. Monthly **77** (1970), 164-167.

[2] D. EPPSTEIN: *Nineteen proofs of Euler's formula: $V - E + F = 2$,* in: The Geometry Junkyard, http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/.

[3] G. PICK: *Geometrisches zur Zahlenlehre,* Sitzungsberichte Lotos (Prag), Natur-med. Verein für Böhmen **19** (1899), 311-319.

[4] K. G. C. VON STAUDT: *Geometrie der Lage,* Verlag der Fr. Korn'schen Buchhandlung, Nürnberg 1847.

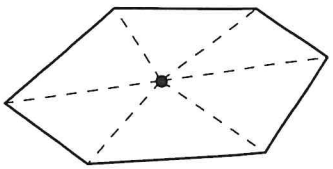
[5] N. E. STEENROD: *Solution 4065/Editorial Note,* Amer. Math. Monthly **51** (1944), 170-171.

Die Museumswächter

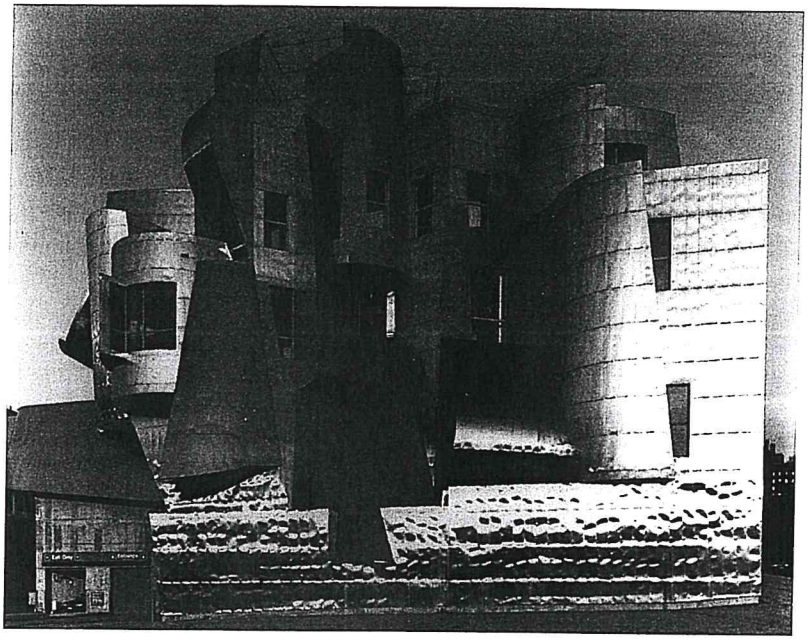
Kapitel 35

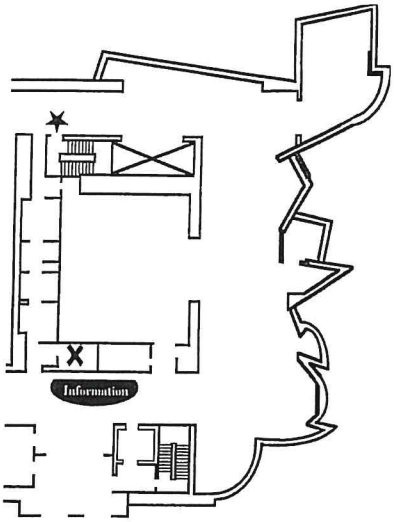
Victor Klee hat 1973 das folgende attraktive Problem gestellt. Nehmen wir an, der Manager eines Museums will sicher gehen, dass jeder Punkt seines Museums im Blickfeld eines Aufsehers liegt. Die Wächter werden an festen Stellen postiert, aber sie dürfen sich drehen. Wie viele Wächter braucht man dann?

Wir stellen uns die Wände des Museums als ein Polygon mit n Seiten vor. Wenn das Polygon konvex ist, dann reicht natürlich ein Wächter aus. Den Wächter kann man dann sogar an jeden Punkt des Museums postieren. Aber im Allgemeinen darf der Grundriss des Museums ein beliebiges geschlossenes ebenes Polygon bilden.



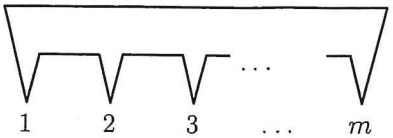
Eine konvexe Ausstellungshalle





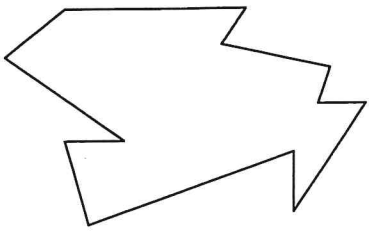
Es gibt wirklich verwinkelte Museen!

Wir betrachten ein Museum mit $n = 3m$ Wänden, dessen Grundriss ein „Kamm“ ist (wie rechts angedeutet). Dann ist leicht zu sehen, dass man mindestens $m = \frac{n}{3}$ Wächter braucht. Der Punkt 1 im Grundriss kann nämlich nur von einem Wächter beobachtet werden, der irgendwo in dem schattierten Dreieck steht, das die 1 enthält, und genauso für die anderen Punkte $2, 3, \ldots, m$. Weil diese Dreiecke alle disjunkt sind, sehen wir, dass man mindestens m Wächter braucht. Aber m Wächter reichen auch aus,



wenn man sie an die oberen Kanten der Dreiecke stellt. Indem wir ein oder zwei Wände hinzufügen, können wir leicht schließen, dass es für jedes n ein Museum mit n Wänden gibt, für das man $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter braucht.

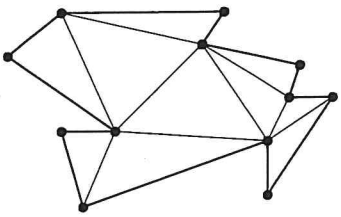
Das folgende Resultat besagt, dass dies auch der schlechteste Fall ist.



Ein Museum mit $n = 12$ Wänden

Satz. *Für jedes Museum mit n Wänden reichen $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter aus.*

Diesen „Museumswächter-Satz" hat als Erster Vašek Chvátal (trickreich) bewiesen, aber der folgende Beweis von Steve Fisk ist wirklich *schön*.



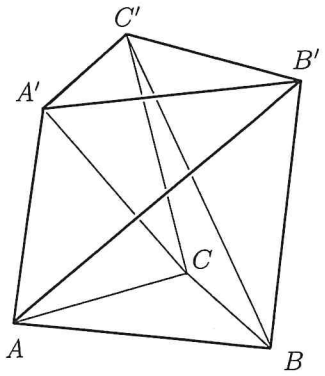
Eine Triangulierung des Museums

■ **Beweis.** Zunächst verbinden wir die Ecken des Polygons durch $n - 3$ sich nicht kreuzende Diagonalen, bis der Innenraum in Dreiecke aufgeteilt ist. So kann man das auf dem Rand gezeigte Museum durch 9 Diagonalen triangulieren. Dabei ist es egal, welche Triangulierung wir wählen. Nun interpretieren wir die erhaltene Figur als einen ebenen Graphen, der die Museumsecken als Ecken und die Wände und Diagonalen als Kanten hat.

Behauptung. *Dieser Graph ist 3-färbbar.*

Für $n = 3$ gibt es nichts zu beweisen. Für $n > 3$ wählen wir zwei beliebige Ecken u und v aus, die durch eine Diagonale verbunden sind. Diese Diagonale zerlegt den Graphen in zwei kleinere triangulierte Graphen, die beide die Kante uv enthalten. Nach Induktion können wir jede Hälfte mit drei Farben färben, wobei wir annehmen dürfen, dass in beiden Färbungen die Ecke u die Farbe 1 und die Ecke v die Farbe 2 erhält. Durch Zusammenkleben der Teile bzw. Färbungen erhalten wir eine 3-Färbung des ganzen Graphen.

Der Rest ist einfach. Da es insgesamt n Ecken gibt, enthält eine der drei Farbklassen, sagen wir die der Ecken mit Farbe 1, höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Ecken, und in diese Ecken stellen wir die Wächter. Weil jedes Dreieck eine Ecke der Farbe 1 enthält, sehen wir, dass die Fläche eines jeden Dreiecks vollständig überwacht ist, und damit auch die Grundfläche des gesamten Museums. □



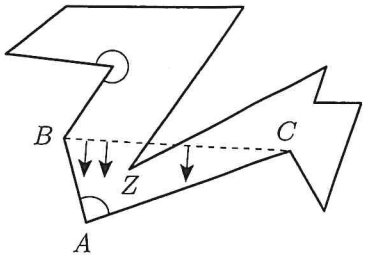
Das Schönhardt-Polyeder: die Innenwinkel an den Kanten AB', BC' und CA' sind größer als 180°.

Dem aufmerksamen Leser ist möglicherweise eine kleine Schwierigkeit in unserer Argumentation aufgefallen. Gibt es eine solche Triangulierung denn wirklich immer? Auf den ersten Blick wird man wohl antworten: Ja, offensichtlich! Nun, die Triangulierung existiert immer, aber offensichtlich ist das keineswegs, und die naheliegende Verallgemeinerung auf den 3-dimensionalen Fall (Zerlegung in Tetraeder ohne zusätzliche Ecken) ist falsch! Das kann man zum Beispiel am *Schönhardt-Polyeder* sehen, das links abgebildet ist. Man erhält es aus einem Dreiecksprisma, indem man das Dreieck im Deckel etwas dreht, so dass die Vierecksseitenflächen jeweils in zwei Dreiecke zerbrechen, jeweils mit einer nicht-konvexen Kante. Versuchen Sie, dieses Polyeder zu triangulieren! Ein Tetraeder der Triangulierung muss das Bodendreieck und gleichzeitig eine weitere Ecke

im Deckel enthalten: aber ein solches Tetraeder ist nicht vollständig im Schönhardt-Polyeder enthalten. Also gibt es keine Triangulierung dieses Polyeders ohne zusätzliche Ecken.

Um zu beweisen, dass im Fall eines ebenen nicht-konvexen Polygons eine Triangulierung immer existiert, verwenden wir wieder Induktion über die Anzahl n der Ecken. Für $n = 3$ ist das Polygon ein Dreieck, also gibt es nichts zu beweisen. Sei nun $n \geq 4$. Um Induktion zu verwenden, reicht es, dass wir *irgendeine* Diagonale finden, die das Polygon P in zwei kleinere Teile zerlegt, so dass wir eine Triangulierung des Gesamtpolygons aus Triangulierungen der beiden Teile zusammensetzen können.

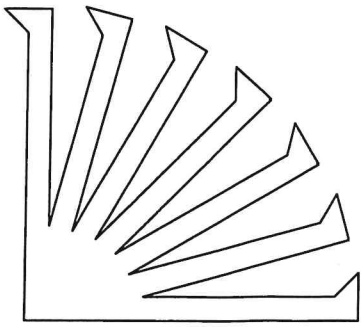
Wir nennen eine Ecke A des Polygons *konvex*, wenn der innere Winkel an der Ecke kleiner als 180° ist. Da die Innenwinkelsumme von P gleich $(n-2)180°$ ist, muss es mindestens eine konvexe Ecke geben. Es gibt sogar mindestens drei davon: Das folgt zum Beispiel aus dem Schubfachprinzip! Oder wir können einfach die konvexe Hülle des Polygons betrachten und feststellen, dass seine Ecken uns konvexe Ecken des Ursprungspolygons liefern.



Nun betrachten wir die zwei Nachbarecken B und C von A. Wenn die Strecke BC ganz im Inneren von P liegt, dann ist sie unsere Diagonale. Wenn nicht, dann enthält das Dreieck ABC weitere Ecken von P. Wir verschieben BC in Richtung auf A bis es die letzte Ecke Z trifft, die in ABC liegt. Nun liegt aber AZ im Inneren von P, und wir haben eine Diagonale. □

Der Museumswächter-Satz hat viele Variationen und Erweiterungen. Zum Beispiel könnte die Grundfläche des Museums ein Polygon „mit Löchern" sein! Dann reichen $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter im Allgemeinen nicht mehr aus. Eine besonders hübsche (ungelöste) Variante sieht so aus:

> *Nehmen wir an, dass jeder Wächter an einer Wand des Museums entlang läuft, und alles überwacht, was von irgendeinem Punkt der Wand aus zu sehen ist.*
> *Wie viele solche „Wandwächter" brauchen wir, um das gesamte Museum zu überwachen?*



Godfried Toussaint hat das Beispiel auf dem Rand konstruiert, das zeigt, dass im Allgemeinen $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ Wächter nötig sein können. Das Polygon hat 28 Seiten (und $4m$ Seiten im allgemeinen Fall), und der Leser ist eingeladen zu überprüfen, dass man wirklich m Wandwächter braucht. Es wird vermutet, dass diese Anzahl von Wächtern auch reicht (außer für einige kleine Werte von n), aber ein Beweis ist nicht in Sicht, und ein BUCH-Beweis erst recht nicht.

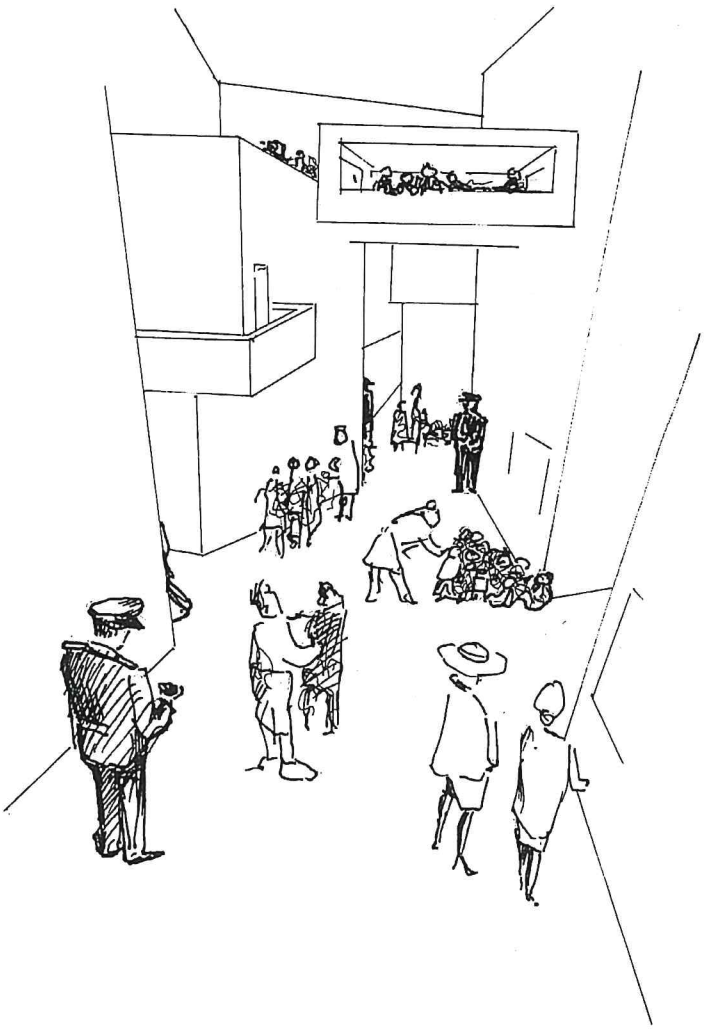
Literatur

[1] V. CHVÁTAL: *A combinatorial theorem in plane geometry,* J. Combinatorial Theory, Ser. B **18** (1975), 39-41.

[2] S. FISK: *A short proof of Chvátal's watchman theorem,* J. Combinatorial Theory, Ser. B **24** (1978), 374.

[3] J. O'ROURKE: *Art Gallery Theorems and Algorithms,* Oxford University Press 1987.

[4] E. SCHÖNHARDT: *Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder,* Math. Annalen **98** (1928), 309-312.



„Museumswächter in drei Dimensionen"