Lösungen Übung 14

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und es bezeichne $\|A\|_Z$ die Zeilensummennorm von A.
1) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_Z \|x\|_\infty$$

2) Nun sei C eine Konstante mit $\|Ax\|_\infty \leq C\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass $\|A\|_Z \leq C$ gilt.

Lösung:
1) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ und sei $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$|(Ax)_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \|A\|_Z \|x\|_\infty$$

Daraus folgt $\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_Z \|x\|_\infty$.
2) Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wir setzen $x_j = 1$, falls $a_{ij} \geq 0$ und $x_j = -1$, falls $a_{ij} < 0$. Für den Vektor $x = (x_1 \dots x_n)^T$ gilt dann:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

und folglich $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \|Ax\|_\infty \leq C\|x\|_\infty = C$.
Da $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig war, folgt daraus $\|A\|_Z \leq C$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix mit $a_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Sei D die Diagonalmatrix mit den Einträgen $a_{11}, \dots, a_{nn}$ auf der Hauptdiagonalen. Ferner sei $N_i = \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ für alle $i = 1, \dots, n$.
Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\|E_n - D^{-1}A\|_Z < 1$

(ii) $\sum_{j \in N_i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ für alle $i = 1, \dots, n$ (A ist strikt diagonaldominant).

Lösung: Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n |(E_n - D^{-1}A)_{ij}| = \sum_{j=1}^n |\delta_{ij} - a_{ii}^{-1}a_{ij}| = \sum_{j \in N_i} |a_{ii}^{-1}a_{ij}| = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|$$

Somit gilt

$$\|E_n - D^{-1}A\|_Z = \max_{i=1,\dots,n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|$$

und daraus folgt die behauptete Äquivalenz.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende strikt diagonaldominante Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Ferner sei $b = (1\ 1\ 1)^T$ und wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.
1) Berechnen Sie die ersten beiden Iterationen x_1 und x_2 des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $x_0 = (0\ 0\ 0)^T$.
2) Berechnen Sie zum Vergleich auch die exakte Lösung von $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Lösung:
1) Sei $D = 10E_3$ die zu A gehörige Diagonalmatrix. Es gilt

$$x_1 = x_0 - D^{-1}(Ax_0 - b) = D^{-1}b = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$x_2 = x_1 - D^{-1}(Ax_1 - b) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 2/25 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

2) Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

Es ist bequemer, zuerst die Zeilen 1 und 2 zu vertauschen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir von der 2. Zeile das 10-fache der 1. Zeile ab und addieren zur 3. Zeile die 1. Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & -101 & -9 & -9 \\ 0 & 11 & 11 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt multiplizieren wir die 2. Zeile mit 11 und die 3. Zeile mit 101:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & -1111 & -99 & -99 \\ 0 & 1111 & 1111 & 202 \end{array}\right)$$

Nun addieren wir zur 3. Zeile die 2. Zeile und teilen anschließend die 2. Zeile wieder durch -11:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 101 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 1012 & 103 \end{array}\right)$$

Man erhält das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a + 10b + c &= 1 \\ 101b + 9c &= 9 \\ 1012c &= 103 \end{aligned}$$

Daraus folgt $c = 103/1012$ und $b = 9(1-c)/101 = 81/1012$ und schließlich $a = 1 - c - 10b = 99/1012 = 9/92$. Die exakte Lösung ist also

$$x = \begin{pmatrix} 9/92 \\ 81/1012 \\ 103/1012 \end{pmatrix} = \frac{1}{1012} \begin{pmatrix} 99 \\ 81 \\ 103 \end{pmatrix}.$$

Die Abweichung zur 2. Iteration des Jacobi-Verfahrens beträgt $\|x - x_2\|_\infty \approx 0{,}002$.