Grundwissen Lineare Algebra
Zusammenfassung der 7.Vorlesungswoche

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

24. bis 28. Mai 2021

Zusammenfassung der 7.Vorlesungswoche

Auf den folgenden Seiten werden die wesentlichen Inhalte der 7.Vorlesungswoche zusammengefasst.
Dies kann und soll **kein Ersatz für die Lektüre des Skriptes** sein. Insbesondere wird für die Beweise hier meist nur auf das Skript verwiesen.

In dieser Woche geht es um lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Das ist **Abschnitt V.1 im Skript**.

Definition

Seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K und sei $F : V \to W$ eine Abbildung. F heißt **linear**, falls folgendes gilt:

(a) $F(v + w) = F(v) + F(w)$ für alle $v, w \in V$.

(b) $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in K$.

Statt linearer Abbildung sagt man auch **Homomorphismus**, im Fall $V = W$ auch **Endomorphismus**.

$\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet die Menge aller Homomorphismen von V nach W. Speziell ist $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$ die Menge aller Endomorphismen von V in sich.

Bemerkung: Seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K und sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $F(0) = 0$ und $F(-v) = -F(v)$ für alle $v \in V$.

Beweis: Siehe Bemerkung V.1.2. im Skript.

Beispiele:
1) Für je zwei Vektorräume V und W ist die konstante Abbildung von V nach W mit Wert 0 offensichtlich linear.
2) Die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear.

Beispiele (Fortsetzung):
3) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $\mu \in K$ und $v_0 \in V$.
Definiere $F : V \to V$ durch $F(v) := \mu v$ für alle $v \in V$ und $G : K \to V$ durch $G(a) := av_0$ für $a \in K$.
Dann sind F und G linear.
4) Die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3x + z \end{pmatrix}$$

ist linear.
5) Sei $V_{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $F : V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(f) := f(x_0)$ ist linear.

Lineare Abbildungen

Definition

Seien A und B beliebige Mengen und sei $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung. Für Teilmengen $C \subseteq A$ heißt

$$f[C] := \{f(x) : x \in C\}$$

das **Bild** von C unter f.
Für Teilmengen $D \subseteq B$ heißt

$$f^{-1}[D] := \{x \in A : f(x) \in D\}$$

das **Urbild** von D unter f.

Lemma

Seien V und W Vektorräume über dem Körper K und sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von V und sei $U' \subseteq W$ ein Unterraum von W.
Dann ist auch $F[U] \subseteq W$ ein Unterraum von W und $F^{-1}[U'] \subseteq V$ ein Unterraum von V.

Beweis: Siehe Lemma V.1.4. im Skript.

Lineare Abbildungen

Definition

Seien K ein Körper und V und W Vektorräume über K. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt die Menge

$$\ker(F) := \{v \in V : F(v) = 0\}$$

der **Kern** von F.

Bemerkung: Wegen $\ker(F) = F^{-1}[\{0\}]$ ist $\ker(F)$ ein Unterraum von V.

Lemma

Seien K ein Körper und V und W Vektorräume über K.
Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: F ist injektiv genau dann, wenn $\ker(F) = \{0\}$.

Beweis: Siehe Lemma V.1.6. im Skript.

Lineare Abbildungen

Definition

Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Für zwei lineare Abbildungen $F, G : V \to W$ und $\lambda \in K$ werden $F + G : V \to W$ und $\lambda F : V \to W$ definiert durch $(F + G)(v) := F(v) + G(v)$ und $(\lambda F)(v) := \lambda F(v)$ für alle $v \in V$.

Bemerkung: Auf diese Weise wird $\mathrm{Hom}(V, W)$ selbst zu einem Vektorraum über K.

Lemma

Sei K ein Körper und seien U, V und W Vektorräume über K. Seien $G : V \to U$ und $F : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist auch $F \circ G : V \to W$ linear.

Beweis: Siehe Lemma V.1.7. im Skript.

Lineare Abbildungen

Satz: Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Dann gilt:
1) Ist E ein Erzeugendensystem von V und sind $F, G : V \to W$ lineare Abbildungen mit $F(v) = G(v)$ für alle $v \in E$, so gilt $F = G$.
2) Ist B eine Basis von V und $f : B \to W$ eine Abbildung, so existiert genau eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(b) = f(b)$ für alle $b \in B$.

Beweis: Siehe Satz V.1.8. im Skript.

Definition

Seien K ein Körper und V und W Vektorräume über K.
Eine bijektive lineare Abbildung $F : V \to W$ nennt man einen **Isomorphismus** von V nach W.
V und W heißen **isomorph** (in Zeichen: $V \cong W$), falls es einen Isomorphismus von V nach W gibt.

Lemma

Seien K ein Körper und V und W Vektorräume über K.
Sei $F : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist auch $F^{-1} : W \to V$ wieder ein Isomorphismus.

Beweis: Siehe Lemma V.1.10. im Skript.

Bemerkung: Für Vektorräume U, V und W über demselben Körper K gelten folgende Regeln bzgl. der Isomorphie:
(i) $V \cong V$
(ii) $V \cong W \ \Rightarrow W \cong V$
(iii) $V \cong W$ und $W \cong U \ \Rightarrow V \cong U$

Lemma

Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Sei $F : V \to W$ ein Isomorphismus und sei $B \subseteq V$ eine Basis von V. Dann ist $F[B]$ eine Basis von W.
Insbesondere gilt $\dim(V) = \dim(W)$, falls $V \cong W$.

Beweis: Siehe Lemma V.1.11. im Skript.

Lineare Abbildungen

Definition

Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K der Dimension $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Ein n-Tupel $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ von Vektoren in V heißt eine **geordnete Basis** von V, falls $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V ist.

Ist $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V, so definieren wir $\Phi_{\mathcal{A}} : K^n \to V$ durch

$$\Phi_{\mathcal{A}}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \sum_{i=1}^{n} x_i a_i.$$

Bemerkung: $\Phi_{\mathcal{A}}$ ist ein Isomorphismus. Die Umkehrabbildung $\Phi_{\mathcal{A}}^{-1}$ wird auch mit $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ bezeichnet. Für $v \in V$ heißt $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(v) \in K^n$ der **Koordinatenvektor** von v bzgl. $\mathcal{A}$

Satz: Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K mit $n := \dim(V) = \dim(W) < \infty$. Dann gilt $V \cong W$.

Beweis: Siehe Satz V.1.13. im Skript.

Satz: Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei A eine Basis für $\ker(F)$ und B eine Basis für $\mathrm{Im}(F)$.
Ferner sei $C \subseteq F^{-1}[B]$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $b \in B$ existiert genau ein $c \in C$ mit $F(c) = b$.
Dann gilt $A \cap C = \emptyset$ und $A \cup C$ ist eine Basis von V.

Beweis: Siehe Satz V.1.14. im Skript.

Satz (Dimensionsformel für lineare Abbildungen):
Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Ferner sei W ein beliebiger Vektorraum über K und es sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind auch $\ker(F)$ und $\mathrm{Im}(F)$ endlich-dimensional und es gilt

$$\dim(V) = \dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F)).$$

Korollar: Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K mit $n := \dim(V) = \dim(W) < \infty$. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: F ist injektiv $\Leftrightarrow$ F ist surjektiv.

Beweise: Siehe Satz V.1.15. und Korollar V.1.16. im Skript.