Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Leipzig, den 8.7.2021

Ergänzungen und Beispiele zu Kapitel 2.8 – Extrema unter Nebenbedingungen

Wir beginnen mit der bereits angekündigten

Korrektur zu Satz 2.19:
Es sei $n \geq 2$, sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $c \in \mathbb{R}$, seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und sei $v_0 = (v_1, ..., v_n) \in D$ mit $g(v_0) = c$.
Ferner gelte:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(v_0) \neq 0 \text{ für mindestens ein } i \text{ mit } 1 \leq i \leq n.$$

Ist dann v_0 eine lokale Lösung des Problems *max* f unter der Nebenbedingung $g = c$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\triangledown f(v_0) = \lambda \cdot \triangledown g(v_0).$$

Beweisskizze:
Wir können annehmen: $\frac{\partial g}{\partial x_n}(v_0) \neq 0$; sonst vertausche die Rolle der Koordinaten. – Dies macht die Denkarbeit nicht einfacher, wohl aber die Schreibarbeit.

Aus der gerade fixierten Annahme folgt – zusammen mit dem sogenannten *Satz über "Implizite Funktionen":*

Es gibt eine offene Umgebung U von $v_0' := (v_1, ..., v_{n-1})$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ mit $h(v_1, ..., v_{n-1}) = v_n$ und

$$g(x_1, ..., x_{n-1}, h(x_1, ..., x_{n-1})) = c \text{ für alle } (x_1, ..., x_{n-1}) \in U.$$

Mit anderen Worten bedeutet das:
Die Gleichung $g(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = c$ kann in einer Umgebung von v_0 nach x_n aufgelöst werden – zu

$$h(x_1, ..., x_{n-1}) = x_n.$$

Laut Fixierung von h ist die Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi(x_1, ..., x_{n-1}) := g(x_1, ..., x_{n-1}, h(x_1, ..., x_{n-1}))$$

konstant (mit einzigem Funktionswert c). Daher ist $\triangledown \varphi(w) = 0$ für alle $w \in U$.
Nach der Kettenregel bedeutet das insbesondere – mit der $(n-1)-$ reihigen Einheitsmatrix E_{n-1}:

$$\triangledown g(v_0) \cdot \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \triangledown h(v_0') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Andererseits besitzt die Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\psi(x_1, ..., x_{n-1}) := f(x_1, ..., x_{n-1}, h(x_1, ..., x_{n-1}))$$

laut Voraussetzung des Satzes in v_0' ein lokales Maximum, weil nach Konstruktion von h die Nebenbedingung $g(x_1, ..., x_{n-1}, h(x_1, ..., x_{n-1})) = c$ für alle $(x_1, ..., x_{n-1}) \in U$ erfüllt ist. Also folgt auch wegen $h(v_0') = v_n$:

$$\bigtriangledown f(v_0) \cdot \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \bigtriangledown h(v_0') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die auftretende Jacobi-Matrix $\begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \bigtriangledown h(v_0') \end{pmatrix}$, die aus n Zeilen und $n-1$ Spalten besteht, hat den – maximal möglichen – Rang $n-1$. Damit folgt aus den letzten Gleichungen, dass die beiden Gradienten $\bigtriangledown g(v_0)$ und $\bigtriangledown f(v_0)$ linear abhängig sind. Weil $\bigtriangledown g(v_0)$ *laut Voraussetzung* nicht der Nullvektor ist, folgt:
$\bigtriangledown f(v_0)$ ist ein skalares Vielfaches von $\bigtriangledown g(v_0)$.

Ein analoges Resultat gilt, wenn die lokale Maximierungsaufgabe durch eine lokale Minimierungsaufgabe ersetzt wird.
In Einzelfällen ist aber zu überprüfen, ob ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum vorliegt – oder ob beides nicht der Fall ist.
Vor Studium eines Beispiels betrachten wir noch folgendes

Gegenbeispiel zu Satz 2.19 im Falle $\bigtriangledown g(v_0) = 0$:

Sei $c := 0$, und definiere $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := -y, \; g(x,y) := y^3 - x^2;$$

siehe auch Aufgabe 37.

Für alle (x,y) mit $g(x,y) = 0$ ist $y^3 = x^2 \geq 0$, also auch $y \geq 0$. f kann das Maximum – unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ – also nur in einem Punkt (x,y) mit $y = 0$ annehmen.
Aus $g(x,0) = 0$ folgt auch: $x = 0$.
Der Punkt $(x,y) = (0,0)$ ist also die einzige – lokale und globale – Lösung des Optimierungsproblems

$$max\, f \text{ unter der Nebenbedingung } g = 0.$$

Andererseits folgt:

$$\bigtriangledown g(0,0) = (0,0), \; \bigtriangledown f(0,0) = (0,-1).$$

$\bigtriangledown f(0,0)$ ist also kein Vielfaches des Vektors $\bigtriangledown g(0,0)$.

Schließlich behandeln wir noch die folgende

Aufgabe:
Man bestimme alle lokalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) := x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) := x^2 - y - 1 = 0$.

Es geht also darum, von der um eine Einheit nach unten verschobenen Standard-Parabel alle lokalen Extrema hinsichtlich des Abstands zum Nullpunkt zu bestimmen, der nach dem Satz des Pythagoras durch $\sqrt{f(x,y)}$ gegeben ist. – Es ist einfacher, mit der Funktion f statt mit $\sqrt{f}$ zu rechnen.

Wir haben also die Vektorgleichung

$$\bigtriangledown f(x,y) = \lambda \cdot \bigtriangledown g(x,y)$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ zu lösen.

Äquivalenzumformung der Vektorgleichung liefert:

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \; 2x = \lambda \cdot 2x \;\wedge\; 2y = -\lambda.$$

Man beachte, dass hier die Bedingung $\bigtriangledown g(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist.

Wie wir sehen werden, gibt es – unter der gestellten Nebenbedingung – mehrere Lösungen. Zu deren Bestimmung untersuchen wir zwei Fälle.

1. Fall: $x = 0$.
In diesem Fall können wir aus der ersten der obigen Gleichungen keine weiteren Schlüsse ziehen. Die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ vereinfacht sich aber nun zu $-y - 1 = 0$. Das bedeutet: $y = -1$. Auch wenn das nun nicht mehr wesentlich ist: Die zweite obige Gleichung ist damit erfüllt für $\lambda = 2$.

Ein kritischer Punkt ist also $P_1 = (0, -1)$.

2. Fall: $x \neq 0$.
Nun liefert die erste obige Gleichung nach Division durch $2x$ direkt: $\lambda = 1$.
Für y folgt somit aus der zweiten Gleichung: $y = -\frac{1}{2}$.

Die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ liefert somit für x die quadratische Gleichung $x^2 = \frac{1}{2}$.

Wir erhalten also $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – und damit die weiteren kritischen Punkte

$$P_2 = (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{1}{2}),\; P_3 = (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{1}{2}).$$

Nun berechnen wir – unter f – die Funktionswerte der kritischen Punkte:

$$f(P_1) = 1,\; f(P_2) = f(P_3) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Ferner gilt trivialerweise

$$lim_{|x| \to \infty} f(x, x^2 - 1) = lim_{|x| \to \infty}(x^2 + (x^2 - 1)^2) = \infty.$$

Man beachte dazu: Ist $g(x,y) = 0$, so ist $y = x^2 - 1$.

Weil f stetig ist und daher auf der kompakten Menge

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\; y = x^2 - 1\}$$

sowohl einen maximalen Wert als auch einen minimalen Wert annimmt, folgt insgesamt:
f besitzt im Punkt $P_1 = (0, -1)$ entlang der gegebenen Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 1$ ein *lokales* Maximum, aber nirgendwo ein globales Maximum.
In den Punkten $P_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$ und $P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$ besitzt f entlang der Parabel sowohl ein lokales als auch ein globales Minimum.
Weitere lokale Extremstellen existieren nicht.

Schließlich geben wir noch die Abstände der drei kritischen Punkte zum Koordinatenursprung an; nach den bisherigen Berechnungen folgt sofort:

$$||P_1|| = \sqrt{f(P_1)} = 1,\; ||P_2|| = \sqrt{f(P_2)} = ||P_3|| = \sqrt{f(P_3)} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$