Grundwissen Lineare Algebra
Zusammenfassung der 5.Vorlesungswoche

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

10. bis 14. Mai

Zusammenfassung der 5.Vorlesungswoche

Auf den folgenden Seiten werden die wesentlichen Inhalte der 5.Vorlesungswoche zusammengefasst.
Dies kann und soll **kein Ersatz für die Lektüre des Skriptes** sein.
Insbesondere wird für die Beweise hier meist nur auf das Skript verwiesen.

In dieser Woche geht es um Vektorräume und ihre Unterräume.
Das sind die **Abschnitte IV.1 und IV.2 im Skript**.

Vektorräume: Definition und Beispiele

Definition

Sei K ein Körper und sei V eine Menge, die mit einer Addition $+ : V \times V \to V$ und einer weiteren Verknüpfung $\cdot : K \times V \to V$ versehen ist. Es gelte:

1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
2) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $v \in V$.
3) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $v \in V$.
4) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ für alle $\lambda \in K$ und alle $v, w \in V$.
5) $1v = v$ für alle $v \in V$.

Dann heißt $(V, +, \cdot)$ ein **Vektorraum** über dem Körper K oder kurz ein K-Vektorraum. Die Elemente von V nennt man **Vektoren**. Die Elemente von K werden als **Skalare** bezeichnet.

Vektorräume: Definition und Beispiele

Das für uns wichtigste Beispiel ist der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ aller Spalten der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

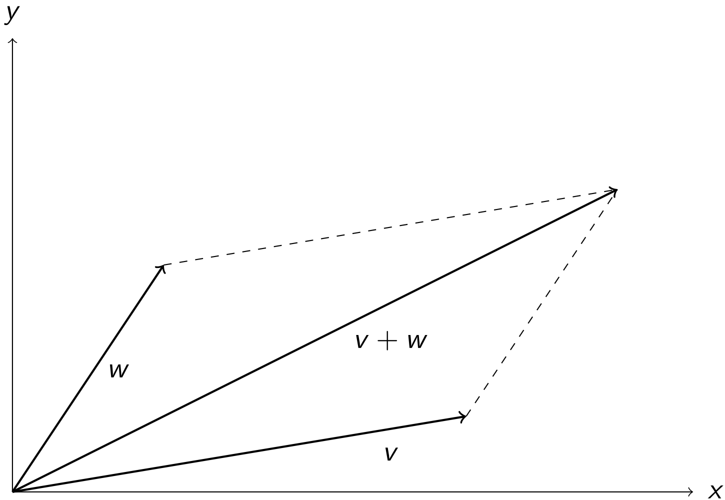
versehen mit der koordinatenweisen Addition und skalaren Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

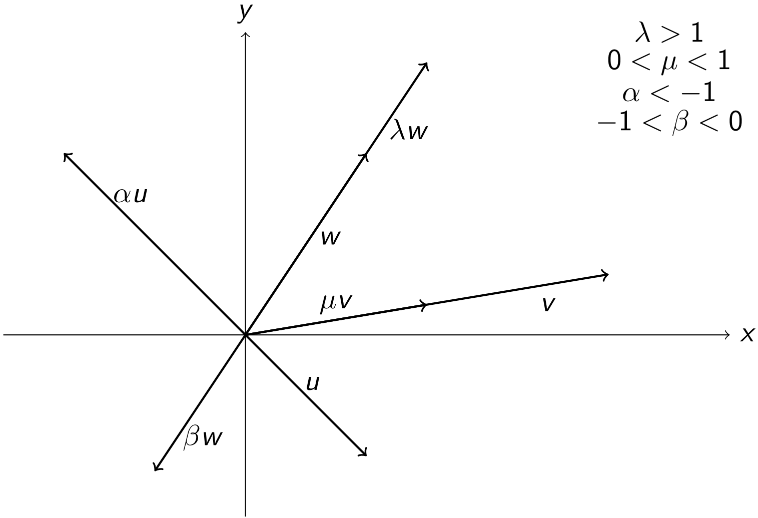
Vektorräume: Definition und Beispiele

Veranschaulichung der Addition im $\mathbb{R}^2$:



Vektorräume: Definition und Beispiele

Veranschaulichung der Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^2$:



$$\lambda > 1$$
$$0 < \mu < 1$$
$$\alpha < -1$$
$$-1 < \beta < 0$$

Vektorräume: Definition und Beispiele

Weitere Beispiele:

1) Für jeden Körper K wird K^n analog zu $\mathbb{R}^n$ definiert.

2) Sei M eine nicht leere Menge und sei V_M die Menge aller Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$.
Für $f, g \in V_M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{für alle } x \in M.$$

Dann ist $(V_M, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

3) $\mathbb{R}$ ist mit der üblichen Addition und der üblichen Multiplikation qx für $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Lemma

Sei K ein Körper und sei V ein Vektorraum über K. Dann gilt für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in K$:

(i) $\lambda v = 0 \ \Leftrightarrow \lambda = 0$ *oder* $v = 0$

(ii) $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$ *(insbesondere ist* $(-1)v = -v$*)*

Definition

Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Ferner sei $U \subseteq V$. Dann heißt U ein **Untervektorraum** oder kurz **Unterraum** von V, falls U versehen mit der Addition und Skalarmultiplikation von V selbst wieder einen K-Vektorraum bildet.

Lemma

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ mit $U \neq \emptyset$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(a) U ist ein Unterraum von V.
(b) Für alle $u, v \in U$ und alle $\lambda \in K$ gilt auch $u + v \in U$ und $\lambda u \in U$.

Beweis: Siehe Lemma IV.2.2. im Skript.

Unterräume

Beispiele:
1) Für jeden Vektorraum V sind sowohl $\{0\}$ als auch V Unterräume von V.
2) Die "x-Achse"

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
3) Allgemeiner ist für $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$U := \{tv : t \in \mathbb{R}\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.
Für $n = 2$ oder $n = 3$ ist U eine Ursprungsgerade in Richtung des Vektors v.

Beispiele (Fortsetzung):
4) Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_{a,b}(x) := ax + b \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$U := \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

ein Unterraum des Vektorraumes $V_{\mathbb{R}}$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
U besteht aus allen Polynomen vom Grad ≤ 1.

Unterräume

Lemma

Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V. Dann ist auch $U_1 \cap U_2$ wieder ein Unterraum von V.

Beweis: Siehe Lemma IV.2.3. im Skript.

Bemerkung: Sind U_1 und U_2 Unterräume von V, so gilt:

$$U_1 \cup U_2 \text{ ist ein Unterraum von } V \;\Leftrightarrow\; U_1 \subseteq U_2 \text{ oder } U_2 \subseteq U_1$$

Beweis: Übung

Unterräume

Definition

Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Ferner sei $A \subseteq V$. Ist $A \neq \emptyset$, so setze

$$\operatorname{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, x_1, \ldots, x_n \in A \right\}.$$

Ferner sei $\operatorname{span}(\emptyset) := \{0\}$.
$\operatorname{span}(A)$ heißt der von A **aufgspannte Unterraum** oder auch die **lineare Hülle** von A.
Ist $\operatorname{span}(A) = V$, so nennt man A ein **Erzeugendensystem** von V.

Unterräume

Lemma

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $A \subseteq V$.
Dann gilt:
1) $\mathrm{span}(A)$ ist ein Unterraum von V mit $A \subseteq \mathrm{span}(A)$.
2) Für alle Unterräume U von V mit $A \subseteq U$ gilt $\mathrm{span}(A) \subseteq U$.

Mit anderen Worten ist span(A) der kleinste Unterraum von V, der A enthält.

Beweis: Siehe Lemma IV.2.5. im Skript.

Unterräume

Beispiele:

1) Wir definieren im $\mathbb{R}^n$ Vektoren $e_1, \dots, e_n$ wie folgt:

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor e_i hat also an der i-ten Stelle eine 1 und alle anderen Einträge sind 0. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Also ist $\operatorname{span}(\{e_1, \dots, e_n\}) = \mathbb{R}^n$.

Unterräume

Beispiele (Fortsetzung):
2) Ein weiteres Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ ist z. B.

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3) Die x-y-Ebene im $\mathbb{R}^3$ lässt sich schreiben als

$$\operatorname{span}\{e_1, e_2\} = \{xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiele (Fortsetzung):
4)

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ 2\lambda \\ 2(\lambda + \mu) \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

Das ist eine schiefe Ebene im Raum.

5) Sei $p_k(x) := x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Dann ist $P_n := \operatorname{span}(\{p_0, \ldots, p_n\})$ der Raum aller Polynome vom Grad $\leq n$.

Unterräume

Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $A, B \subseteq V$. Wir setzen

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

$A + B$ heißt die **Summe** von A und B.
Für $a \in V$ schreibt man kurz $a + A$ anstelle von $\{a\} + A$.
Mengen der Form $a + U$, wobei U ein Unterraum von V ist, nennt man **affine Unterräume**.

Lemma

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, seien $U, W \subseteq V$ Unterräume von V und seien $a, b \in V$. Dann gilt:
1) Ist $b \in a + U$, so ist $a + U = b + U$.
2) Aus $a + U = b + W$ folgt $U = W$.

Beweis: Übung

Unterräume

Lemma

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien U_1 und U_2 Unterräume von V.
Dann gilt $U_1 + U_2 = \mathrm{span}(U_1 \cup U_2)$.
Insbesondere ist $U_1 + U_2$ wieder ein Unterraum von V.

Beweis: Siehe Lemma IV.2.9. im Skript.

Unterräume

Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien U_1 und U_2 Unterräume von V.
Dann nennt man V die **direkte Summe** von U_1 und U_2, falls $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt.
In diesem Fall schreibt man $V = U_1 \oplus U_2$.

Lemma

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) $V = U_1 \oplus U_2$
2) Für alle $v \in V$ existiert **genau ein** *Paar $(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2$ mit $u_1 + u_2 = v$.*

Beweis: Siehe Lemma IV.2.11. im Skript.