§7 Isometrische Einbettungen Endlicher Metrischer Räume in Euklidische Vektorräume

Konvention 7.1:

In diesem Paragraphen sei $M = (S, d)$ ein endlicher Metrischer Raum mit mindestens 3 Elementen.
Für $s, t_1, t_2 \in S$ sei

$$(7.1) \qquad b_s(t_1, t_2) := \frac{1}{2} \cdot \left(d(s, t_1)^2 + d(s, t_2)^2 - d(t_1, t_2)^2\right).$$

Satz 7.2:

Sei $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein positiv definites Skalarprodukt mit zugehöriger Norm $\| \ \|_g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$(7.2) \qquad \|v\|_g := \sqrt{g(v, v)} \qquad \text{für } v \in \mathbb{R}^n.$$

Für eine Abbildung $p: S \to \mathbb{R}^n$ sind dann die 3 folgenden Aussagen äquivalent:

(i) p ist eine Isometrie von M nach $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_g)$.

(ii) Für alle $s, t_1, t_2 \in S$ gilt:

$$(7.3) \qquad b_s(t_1, t_2) = g(p(t_1) - p(s), p(t_2) - p(s)).$$

(iii) Es gibt ein $s \in S$, so dass die Gleichung (7.3) für alle $t_1, t_2 \in S$ gilt.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$g(v, v) + g(w, w) - g(v - w, v - w) = 2 \cdot g(v, w).$$

Weil p nach (i) eine Isometrie ist, folgt insbesondere für $v = p(x_1) - p(s)$ und $w = p(x_2) - p(s)$:

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot g(p(x_1)-p(s), p(x_2)-p(s)) \\
&= g(p(x_1)-p(s), p(x_1)-p(s)) + g(p(x_2)-p(s), p(x_2)-p(s)) \\
&\quad - g(p(x_1)-p(x_2), p(x_1)-p(x_2)) \\
&= \|p(x_1)-p(s)\|_g^{\,2} + \|p(x_2)-p(s)\|_g^{\,2} \\
&\quad - \|p(x_1)-p(x_2)\|_g^{\,2} \\
&= 2 \cdot b_s(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Für alle $x_1, x_2 \in S$ folgt aus (iii):

$$
\begin{aligned}
&\|p(x_1)-p(x_2)\|_g^{\,2} \\
&= g(p(x_1)-p(x_2), p(x_1)-p(x_2)) \\
&= g(p(x_1)-p(s), p(x_1)-p(s)) + g(p(x_2)-p(s), p(x_2)-p(s)) \\
&\quad - 2 \cdot g(p(x_1)-p(s), p(x_2)-p(s)) \\
&= b_s(x_1, x_1) + b_s(x_2, x_2) - 2 \cdot b_s(x_1, x_2) \\
&= d(s, x_1)^2 + d(s, x_2)^2 \\
&\quad - (d(s, x_1)^2 + d(s, x_2)^2 - d(x_1, x_2)^2) \\
&= d(x_1, x_2)^2 ;
\end{aligned}
$$

also ist p eine Isometrie. $\square$

Lemma 7.3:

Sei $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein positiv definites Skalar=produkt. Für $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ setze

$$(7.4) \qquad D_g(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} g(v_1, v_1) & \dots & g(v_1, v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ g(v_k, v_1) & \dots & g(v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(7.4a) $\quad D_g(v_1, \dots, v_k) > 0$, falls $v_1, \dots, v_k$ paarweise verschieden und linear unabhängig sind,

(7.4b) $\quad D_g(v_1, \dots, v_k) = 0$ sonst.

Beweis:

Sind $v_1, \dots, v_k$ paarweise verschieden und linear unabhängig, so folgt für alle $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, weil g positiv definit ist:

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \cdot \begin{pmatrix} g(v_1, v_1) & \dots & g(v_1, v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ g(v_k, v_1) & \dots & g(v_k, v_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$= \left(g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot v_i, v_1\right), \dots, g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot v_i, v_k\right) \right) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$= g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot v_j\right)$$

$$> 0.$$

Folglich ist die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} g(v_1, v_1) & \dots & g(v_1, v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ g(v_k, v_1) & \dots & g(v_k, v_k) \end{pmatrix}$$

positiv definit, womit (7.4 a) folgt.

Sind andererseits $v_1, \dots, v_k$ linear abhängig oder ist $\#\{v_1, \dots, v_k\} < k$, so können wir aus Symmetriegründen annehmen:

$$v_1 = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i \cdot v_i \qquad \text{für gewisse } \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} & D_g(v_1, \dots, v_k) \\ &= \det \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{k} \lambda_i \cdot g(v_1, v_i) & g(v_1, v_2) & \dots & g(v_1, v_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=2}^{k} \lambda_i \cdot g(v_k, v_i) & g(v_k, v_2) & \dots & g(v_k, v_k) \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Konvention 7.4:

Für $s_0, s_1, \dots, s_k \in S$ setze

(7.5a) $$M_{s_0}(s_1, \dots, s_k) := \begin{pmatrix} b_{s_0}(s_1, s_1) & \dots & b_{s_0}(s_1, s_k) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s_0}(s_k, s_1) & \dots & b_{s_0}(s_k, s_k) \end{pmatrix}$$

sowie

(7.5b) $$D_{s_0}(s_1, \dots, s_k) := \det(M_{s_0}(s_1, \dots, s_k)).$$

Dann ist $M_{s_0}(s_1, \dots, s_k)$ eine symmetrische Matrix.

Ferner gilt für alle $s_0, s_1 \in S$:

(7.6a) $\quad B_{s_0}(s_0, s_1) = 0$,

(7.6b) $\quad D_{s_0}(s_1) = B_{s_0}(s_1, s_1) = d(s_0, s_1)^2$.

Schließlich gilt:

(7.6c) $\quad D_{s_0}(s_1, \dots, s_l) = 0$ für alle $s_0, s_1, \dots, s_l \in S$ mit $\# \{s_0, s_1, \dots, s_l\} \leq l$.

<u>Theorem 7.5:</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind für den gegebenen endlichen Metrischen Raum $M = (S, d)$ folgende vier Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$, ein positiv definites Skalarprodukt $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sowie eine Isometrie p von M nach $(\mathbb{R}^k, \| \ \|_g)$.

(ii) Zu jedem positiv definiten Skalarprodukt $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt es eine Isometrie p von M nach $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_g)$.

(iii) Sind $s_0, s_1, \dots, s_l \in S$ beliebig, so gilt:

(7.7a) $\quad D_{s_0}(s_1, \dots, s_l) \geq 0$ für $1 \leq l \leq n$,

(7.7b) $\quad D_{s_0}(s_1, \dots, s_l) = 0$ für $l > n$.

(iv) Es gibt ein $s_0 \in S$, so dass die Beziehungen (7.7a) und (7.7b) für alle $s_1, \dots, s_l \in S$ gelten.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Im Falle $k = n$ folgt dieser Schritt aus Satz 6.7.
Ist $k < n$, so genügt es, ein positiv definites Skalarprodukt $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ anzugeben, das g auf folgende Weise fortsetzt:

(7.8 a)
$$\tilde{g}((x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0), (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)) = g((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k))$$
für alle $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$.

Dann kann p auch als eine Isometrie von M nach $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_{\tilde{g}})$ aufgefaßt werden.
Dazu sei

(7.8 b)
$$\tilde{g}((x_1, \dots, x_k, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_k, \dots, y_n)) := g((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) + \sum_{i=k+1}^{n} x_i \cdot y_i .$$
für $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Sei $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ irgendein positiv definites Skalarprodukt, und sei p eine Isometrie von M nach $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_g)$.
Dann liefert Satz 7.2, (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$D_{s_0}(s_1, \dots, s_\ell) = \det \begin{pmatrix} g(p(s_1)-p(s_0), p(s_1)-p(s_0)) & \dots & g(p(s_1)-p(s_0), p(s_\ell)-p(s_0)) \\ & \vdots & \\ g(p(s_\ell)-p(s_0), p(s_1)-p(s_0)) & \dots & g(p(s_\ell)-p(s_0), p(s_\ell)-p(s_0)) \end{pmatrix} .$$

(7.7a) und (7.7b) folgen damit aus (7.4a) und (7.4b).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) ist trivial.

(iv) $\Rightarrow$ (i):

Sei $(s_i)_{1\le i\le k}$ eine maximale Familie von Elementen in S mit

$$D_{s_0}(s_1,\dots,s_k) > 0.$$

Nach (7.6b) und (7.7b) ist $1\le k\le n$; ferner gilt nach (7.6c): $\#\{s_0, s_1,\dots,s_k\} = k+1$.

Setze

(7.9a) $\quad a_{ij} := b_{s_0}(s_i, s_j)$ für $1\le i,j\le k$

sowie

(7.9b) $\quad A := (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$.

Dann ist die Matrix A symmetrisch.

Nach (7.7a) ist $\det((a_{ij})_{1\le i,j\le m}) \ge 0$ für alle $m\in\mathbb{N}$ mit $1\le m\le k$; folglich induziert die Matrix A ein positiv definites Skalarprodukt $g: \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, gegeben durch

(7.10) $\quad g(v,w) := v^T\cdot A\cdot w$ für alle Spalten-Vektoren $v,w\in\mathbb{R}^k$.

Definiere nun $p: S\to\mathbb{R}^k$ durch die Forderung

(7.11) $\quad A\cdot p(s) := (b_{s_0}(s_1,s),\dots,b_{s_0}(s_k,s))^T$ für $s\in S$.

Für alle $t\in S$ ist $b_{s_0}(t,s_0) = 0$; somit folgt

(7.12) $\quad p(s_0) = (0,\dots,0)^T$.

Nach Satz 7.2, (iii) ⇒ (i) reicht es also, zu zeigen, dass für alle $t_1, t_2 \in S$ gilt:

(7.13)
$$b_{s_0}(t_1, t_2) = g(p(t_1) - p(s_0), p(t_2) - p(s_0)) = g(p(t_1), p(t_2)).$$

(7.13) ist trivial, falls $t_1 = s_0$ oder $t_2 = s_0$.

(7.11) liefert für $1 \le i \le k$:

(7.14)
$$p(s_i) = e_i := (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)^T.$$

Insbesondere erhalten wir für $1 \le i, j \le k$:

$$b_{s_0}(s_i, s_j) = a_{ij} = g(e_i, e_j) = g(p(s_i), p(s_j)).$$

(7.13) gilt also im Falle $\{t_1, t_2\} \subseteq \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$.

Sei nun $t_1 = s_j$ für ein j mit $1 \le j \le k$ und $t = t_2 \in S \setminus \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$. Dann liefert (7.11):

$$g(p(s_j), p(t)) = e_j^T \cdot A \cdot p(t) = b_{s_0}(s_j, t).$$

Schließlich seien $t_1, t_2 \in S \setminus \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$. Wir schreiben

$$p(t_1) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^T, \quad p(t_2) = (\mu_1, \ldots, \mu_k)^T$$

und setzen

$$z_1 := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot b_{s_0}(t_2, s_i), \quad z_2 := \sum_{i=1}^{k} \mu_i \cdot b_{s_0}(t_1, s_i).$$

Dann erhalten wir für eine geeignete $2 \times k$ - Matrix B:

$$
\begin{aligned}
&0 \\
&= D_{10}(s_1,\dots,s_k,t_1,t_2) \\
&= \det\left(\begin{array}{c|cc} M_{10}(s_1,\dots,s_k) & A\cdot p(t_1) & A\cdot p(t_2) \\ \hline B & b_{10}(t_1,t_1) & b_{10}(t_1,t_2) \\ & b_{10}(t_2,t_1) & b_{10}(t_2,t_2) \end{array}\right) \\
&= \det\left(\begin{array}{c|cc} A & & O \\ \hline B & 0 & b_{10}(t_1,t_2)-z_2 \\ & b_{10}(t_2,t_1)-z_1 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Wegen der Maximalität von k ist dabei

$$D_{10}(s_1,\dots,s_k,t_1) = D_{10}(s_1,\dots,s_k,t_2) = 0$$

und somit

$$b_{10}(t_1,t_1) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot b_{10}(t_1,s_i)\ ,$$

$$b_{10}(t_2,t_2) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \cdot b_{10}(t_2,s_j)\ .$$

Wegen $\det A > 0$ folgt also:

$$(b_{10}(t_2,t_1)-z_1)\cdot(b_{10}(t_1,t_2)-z_2) = 0. \tag{7.15}$$

Ferner liefert (7.11):

$$
\begin{aligned}
&z_1 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \Big(\sum_{j=1}^{k} b_{10}(s_i,s_j)\cdot \mu_j\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu_j \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} b_{10}(s_j,s_i)\cdot \lambda_i\Big) \\
&= z_2\ .
\end{aligned}
$$

Nach (7.15) bedeutet das:

$$z_1 = z_2 = b_{s_0}(t_1, t_2).$$

Folglich ist

$$g(p(t_1), p(t_2)) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = b_{s_0}(t_1, t_2)$$

wie gewünscht. $\square$

Als besonderen Spezialfall von Theorem 7.5 heben wir hervor:

Theorem 7.6:

Für den Metrischen Raum $M = (S, d)$ und $n \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt eine Isometrie p von M in den Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$.

(ii) Es gibt ein $s_0 \in S$, sodass für alle $s_1, \dots, s_\ell \in S$ gilt:

$$D_{s_0}(s_1, \dots, s_\ell) \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq \ell \leq n$$

$$D_{s_0}(s_1, \dots, s_\ell) = 0 \quad \text{für } \ell > n.$$