10. Übungsblatt zu "Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 17.6.2021

37.) Definiere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x,y) := y^3 - x^2$. Berechnen Sie $\bigtriangledown g(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, und bestimmen Sie alle Punkte (x,y), für die dieser Gradient der Nullvektor ist.
Welcher Zusammenhang besteht zu der Kurve mit der Gleichung $y^3 = x^2$?

38.) Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Jacobi-Matrix zu folgender Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} e^x \cdot cos(y) \\ e^x \cdot sin(y) \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

39.) Im folgenden seien a, b fixierte positive reelle Zahlen.

i) Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(t) := \begin{pmatrix} a \cdot cos(t) \\ b \cdot sin(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $df(t) = f'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Beschreiben Sie das Bild $f(\mathbb{R})$ geometrisch!

ii) Definiere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x,y) := \tfrac{1}{a^2} \cdot x^2 + \tfrac{1}{b^2} \cdot y^2.$$

Berechnen Sie $g(f(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

iii) Berechnen Sie $\bigtriangledown g(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie für jedes $c > 0$ die Niveaumenge $N_c := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x,y) = c\}$.
Welcher Zusammenhang besteht zu der Funktion f ?

iv) Berechnen Sie $\bigtriangledown g(f(t)) \bullet f'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

40.) Jeder Punkt $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kann wie folgt durch seine **Polarkoordinaten** $r > 0$ und $\varphi \in]-\pi, \pi]$ beschrieben werden:

$$x = r \cdot cos(\varphi)\,,\; y = r \cdot sin(\varphi);$$

dabei ist $r = d(O,P)$, und φ ist der Winkel, den die positive $x-$Achse mit der Strecke $\overline{OP}$ einschließt, die vom Nullpunkt O zum Punkt P verläuft.
Wir betrachten demgemäß die – *offenen* – Teilmengen $D_1 := \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$ und $D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0 \;\vee\; x > 0\}$ von $\mathbb{R}^2$ sowie die vektorwertige – und bijektive – Funktion $f : D_1 \to D_2$, gegeben durch:

$$f(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot cos(\varphi) \\ r \cdot sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

b.w.

i) Berechnen Sie sowohl die Jacobi-Matrix $df(r,\varphi)$ als auch ihre Determinante für alle $(r,\varphi) \in D_1$.

ii) Verifizieren Sie, dass die Umkehrfunktion $g : D_2 \to D_1$ zu f gegeben ist durch

$$g(x,y) := \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ 2 \cdot arctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}) \end{pmatrix}.$$

Dazu können – ohne Beweis – die folgenden Formeln verwendet werden:

$$cos(2 \cdot arctan(t)) = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}, \ sin(2 \cdot arctan(t)) = \tfrac{2t}{1+t^2}.$$

iii) Berechnen Sie $dg(x,y)$ für alle $(x,y) \in D_2$.
Welcher Zusammenhang besteht – für festes $(r,\varphi) \in D_1$ – zwischen den Matrizen $df(r,\varphi)$ und $dg(f(r,\varphi))$?

Anmerkung: Die Umkehrabbildung g zu f wird – zumindest in der *rechten offenen Halbebene* $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x > 0\}$ – häufig auch wie folgt angegeben:

$$g(x,y) := \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ arctan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung ist sogar noch besser nachvollziehbar, hat aber den Nachteil, dass sie sich nicht ohne Fallunterscheidung auf eine noch größere offene Menge als U fortsetzen läßt.
Dagegen ist die angegebene Menge D_2 eine möglichst große offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, auf der g stetig ist. – Die Stetigkeit wird sofort verletzt, wenn man versucht, g auf irgendwelche Punkte der negativen $x-$Achse fortzusetzen.