Grundwissen Lineare Algebra
Zusammenfassung der 11.Vorlesungswoche

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

21. bis 25. Juni 2021

Zusammenfassung der 11.Vorlesungswoche

Auf den folgenden Seiten werden die wesentlichen Inhalte der 11.Vorlesungswoche zusammengefasst.
Dies kann und soll **kein Ersatz für die Lektüre des Skriptes** sein. Insbesondere wird für die Beweise hier meist nur auf das Skript verwiesen.

In dieser Woche geht es um Skalarprodukte und Orthogonalität (**Abschnitte VII.1 und VII.2** im Skript).

Skalarprodukte und ihre Eigenschaften

Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Abbildung $\varphi : V \times V \to K$ heißt **Bilinearform**, falls folgendes gilt:

(i) $\varphi(\lambda v, w) = \lambda\varphi(v, w) = \varphi(v, \lambda w)$ für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in K$.

(ii) $\varphi(v_1 + v_2, w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$ für alle $v_1, v_2, w \in V$.

(iii) $\varphi(v, w_1 + w_2) = \varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2)$ für alle $w_1, w_2, v \in V$.

M. a. W. φ ist in jeder der beiden Variablen linear.

Beispiel: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

ist eine Bilinearform.

Skalarprodukte und ihre Eigenschaften

Definition

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **Skalarprodukt** auf V, falls folgendes gilt:

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine Bilinearform.

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist **symmetrisch**, d. h. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ für alle $v, w \in V$.

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist **positiv definit**, d. h. $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

Beispiel: Für $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T, y = (y_1 \ \dots \ y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, das sogenannte **euklidische** Skalarprodukt.

Skalarprodukte und ihre Eigenschaften

Definition

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt **Sesquilinearform**, falls folgendes gilt:

(i) $\varphi(\lambda v, w) = \lambda\varphi(v, w)$ und $\varphi(v, \lambda w) = \bar{\lambda}\varphi(v, w)$ für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) $\varphi(v_1 + v_2, w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$ für alle $v_1, v_2, w \in V$.

(iii) $\varphi(v, w_1 + w_2) = \varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2)$ für alle $w_1, w_2, v \in V$.

Beispiel: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_2 \\ u_1 & \bar{u}_2 \end{vmatrix} = z_1 \bar{u}_2 - \bar{z}_2 u_1$$

ist eine Sesquilinearform.

Definition

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt **Skalarprodukt** auf V, falls folgendes gilt:

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine Sesquilinearform.

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist **hermitesch**, d. h. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ für alle $v, w \in V$.

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist **positiv definit**, d. h. $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

Beispiel: Für $z = (z_1 \ \ldots \ z_n)^T, u = (u_1 \ \ldots \ u_n)^T \in \mathbb{C}^n$ setzen wir

$$\langle z, u \rangle := \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{u}_i .$$

Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, das **kanonische Skalarprodukt** auf $\mathbb{C}^n$.

Definition

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung. Für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gelte:

(i) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

(ii) $\|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Dann heißt $\|\cdot\|$ eine **Norm** auf V.

Skalarprodukte und ihre Eigenschaften

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V.
Sei $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für alle $v \in V$. Dann gilt

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis: Siehe Satz VII.1.7. im Skript.

Satz: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Sei $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für alle $v \in V$. Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V.

Beweis: Siehe Satz VII.1.8. im Skript.

Jedes Skalarprodukt induziert also eine Norm. Wichtigstes Beispiel ist wieder das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Hier ist die induzierte Norm die **euklidische Norm**

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

wobei $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$.
Stellt man Vektoren im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ als Pfeile dar, so ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras, dass $\|x\|_2$ gerade gleich der Länge des Pfeils ist (im Sinne der üblichen, euklidischen Geometrie).

Skalarprodukte und ihre Eigenschaften

Jede Norm $\|\cdot\|$ auf einem (reellen oder komplexen) Vektorraum V induziert auch einen Abstandsbegriff wie folgt: Für alle $v, w \in V$ setzen wir $d(v, w) := \|v - w\|$ und nennen dies den **Abstand** von v zu w. Es gilt dann

(a) $d(v, w) \geq 0$ für alle $v, w \in V$,

(b) $d(v, w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = w$,

(c) $d(v, w) = d(w, v)$ für alle $v, w \in V$,

(d) $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ für alle $v, w, u \in V$.

Die Aussagen (a)–(d) fasst man auch folgendermaßen zusammen: d ist eine **Metrik** auf V.
Im Falle des $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Norm erhält man auf diese Weise gerade den üblichen, euklidischen Abstand.

Skalarprodukte und ihre Eigenschaften

Definition

Sei V ein *reeller* Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Wir setzen

$$\angle(v, w) := \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}\right)$$

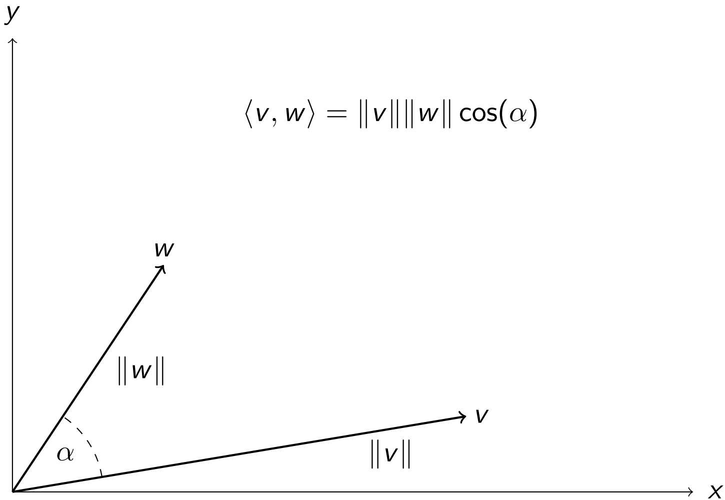
und nennen dies den **Winkel** zwischen v und w. Hierbei bezeichnet arccos die Arcus-Kosinusfunktion, also die Umkehrfunktion des Kosinus auf der Menge $\{\varphi \in \mathbb{R} : 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

Mit der obigen Definition gilt dann also

$$\langle v, w \rangle = \|v\|\|w\| \cos(\angle(v, w)).$$

Skalarprodukte und ihre Eigenschaften

Skalarprodukt und Winkel:



Lemma

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Wir bezeichnen das kanonische Skalarprodukt sowohl auf dem $\mathbb{K}^n$ als auch auf dem $\mathbb{K}^m$ mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Seien $x \in \mathbb{K}^n$ und $y \in \mathbb{K}^m$.
1) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt: $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$
2) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt: $\langle Ax, y \rangle = \langle x, \bar{A}^T y \rangle$
Hierbei bezeichnet $\bar{A}$ die Matrix $(\overline{a_{ij}})_{i,j=1}^{m,n}$.

Beweis: Siehe Lemma VII.1.10. im Skript.

Orthogonalität

Definition

Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Seien $v, w \in V$.
Man sagt, dass v **senkrecht** auf w steht (oder auch: v ist **orthogonal** zu w), falls $\langle v, w \rangle = 0$ gilt. In Zeichen: $v \perp w$.

Für einen reellen Vektorraum mit Skalarprodukt gilt mit unserer Definition des Zwischenwinkels also $v \perp w \Leftrightarrow \angle(v, w) = \pi/2$ (was genau 90° entspricht).

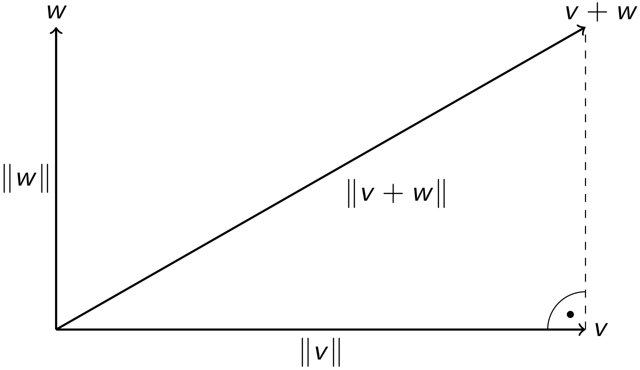
Satz des Pythagoras: Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien $v, w \in V$ mit $v \perp w$. Dann gilt $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Beweis: Siehe Satz VII.2.2. im Skript.

Orthogonalität

Satz des Pythagoras:

$$v \perp w \;\Rightarrow\; \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$



Definition

Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$.
Wir sagen, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ ein **Orthonormalsystem** (kurz ONS) bildet, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und $\|v_i\| = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Beispiele:
1) $(e_1, \ldots, e_n)$ bildet ein ONS im $\mathbb{R}^n$ bzgl. des euklidischen Skalarprodukts.
2) Die Vektoren

$$v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden ein ONS im $\mathbb{R}^3$ bzgl. des euklidischen Skalarprodukts.

Orthogonalität

Lemma

Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und sei $(v_1,\ldots,v_n)$ ein ONS in V. Dann ist $(v_1,\ldots,v_n)$ linear unabhängig.

Beweis: Siehe Lemma VII.2.4. im Skript.

Korollar: Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $\dim(V) = n$.
Ist $(v_1,\ldots,v_n)$ ein ONS in V, so ist $(v_1,\ldots,v_n)$ eine geordnete Basis von V.

In diesem Fall spricht man von einer **Orthonormalbasis** (kurz ONB). Zum Beispiel ist $(e_1,\ldots,e_n)$ eine ONB des $\mathbb{R}^n$ bzgl. des euklidischen Skalarprodukts.

Orthogonalität

Lemma

Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V. Dann ist

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

für alle $v \in V$.

M. a. W. gilt $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$ für alle $v \in V$.

Beweis: Siehe Lemma VII.2.6. im Skript.

Orthogonalität

Satz: Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in V$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:
1) $(w_1, \ldots, w_n)$ ist ein ONS.
2) Es gilt $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_k\} \ \ \forall k = 1, \ldots, n$.

Die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ können mit Hilfe des sogenannten **Gram-Schmidt-Verfahrens** wie folgt rekursiv konstruiert werden:

$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \text{und} \quad w_{m+1} := \frac{v_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \langle v_{m+1}, w_k \rangle w_k}{\|v_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \langle v_{m+1}, w_k \rangle w_k\|}$$

für $m = 1, \ldots, n-1$.

Beweis: Siehe Satz VII.2.7. im Skript.

Orthogonalität

Definition

Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $A \subseteq V$. Dann heißt

$$A^\perp := \{v \in V : \langle v, a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}$$

das **orthogonale Komplement** von A.

Bemerkungen:

1) $A^\perp$ ist ein Unterraum von V.
2) Es gilt $A^\perp = (\mathrm{span}(A))^\perp$.

Orthogonalität

Satz: Sei V ein endlich-dimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum.
Dann ist $V = U \oplus U^{\perp}$.
Insbesondere gilt $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^{\perp})$.
Ferner gilt $U^{\perp\perp} = U$.

Beweis: Siehe Satz VII.2.9. im Skript.