# Lösungen Übung 11

**Aufgabe 1** (2 Punkte)**.** Sei $V$ ein reeller Vektorraum und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $V$. Ferner sei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf $V$. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \forall v, w \in V.$$

*Lösung*: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle + \langle v - w, v - w \rangle \\
&= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\
&= 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2** (2+1 Punkte)**.** Für einen Vektor $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ setzen wir:

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

1) Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_\infty$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert.
2) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ die Norm $\| \cdot \|_\infty$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

*Lösung*:
1) Homogenität: Seien $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\|x\|_\infty = |x_j|$. Dann gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ $|x_i| \leq |x_j|$ und somit auch $|\lambda x_i| = |\lambda||x_i| \leq |\lambda||x_j|$. Also ist $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda||x_j| = |\lambda|\|x\|_\infty$.
Definitheit: Sei $\|x\|_\infty = 0$. Dann folgt $0 \leq |x_i| \leq 0$ und somit $x_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, also $x = 0$.
Dreiecksungleichung: Seien $x = (x_1 \dots x_n)^T$ und $y = (y_1 \dots y_n)^T$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\|x + y\|_\infty = |x_j + y_j|$. Dann folgt:

$$\|x + y\|_\infty \leq |x_j| + |y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

2) Sei nun $n \geq 2$. Es gilt $\|e_1\|_\infty = 1 = \|e_2\|_\infty$ und $\|e_1 + e_2\|_\infty = 1 = \|e_1 - e_2\|_\infty$, also

$$\|e_1 + e_2\|_\infty^2 + \|e_1 - e_2\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2\|e_1\|_\infty^2 + 2\|e_2\|_\infty^2.$$

Wegen Aufgabe 1 kann $\| \cdot \|_\infty$ daher nicht von einem Skalarprodukt induziert werden.

**Aufgabe 3** (3 Punkte)**.** Wir betrachten die folgenden drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es sei $U := \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von $U$ (bzgl. des euklidischen Skalarprodukts).

*Lösung*: Man sieht leicht, dass die Vektoren $v_1, v_2$ und $v_3$ linear unabhängig sind. Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens liefert:

$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = v_1$$

$$v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = v_2 + v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 := \frac{v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1\|_2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 = v_3 - 3v_1 - \frac{4}{3} w_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$w_3 := \frac{v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2}{\|v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{261}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$(w_1, w_2, w_3)$ ist ein ONS mit $\operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = U$, also eine ONB für $U$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform.
Zeigen Sie: Es existiert genau eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\varphi(x, y) = x^T A y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

*Lösung*:
1) Sei $A$ die Matrix mit den Einträgen $a_{ij} := \varphi(e_i, e_j)$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Für alle $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ und $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ im $\mathbb{R}^n$ gilt dann wegen der Bilinearität von $\varphi$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i (Ay)_i = x^T A y$$

2) Sei nun $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine weitere $n \times n$-Matrix mit $\varphi(x, y) = x^T B y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$a_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = e_i^T B e_j = (Be_j)_i = b_{ij}$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$, also $A = B$.