Walter Wenzel
Universität Leipzig
Seminar Kombinatorische Geometrie

Leipzig, den 29.6.2021

Dreibeinräume

Konvention I:
Im folgenden sei $M = (S, d)$ ein Metrischer Raum.
Für Elemente $x, y \in S$ ist das *Intervall* $[x, y]$ definiert durch

$$[x, y] := \{u \in S \,|\, d(x, y) = d(x, u) + d(u, y)\}.$$

Definition II:
Der Metrische Raum $M = (S, d)$ ist ein **Dreibeinraum**, falls für alle $x, y, z \in S$ der Durchschnitt der Intervalle $[x, y], [x, z], [y, z]$ nicht leer ist; das heißt, es gibt ein $m \in S$ mit:

$$d(x, y) = d(x, m) + d(m, y),\ d(x, z) = d(x, m) + d(m, z),\ d(y, z) = d(y, m) + d(m, z).$$

Beispiele und Gegenbeispiele III:

i) $\mathbb{R}$ ist mit der gewöhnlichen Metrik ein Dreibeinraum:
Sind $x, y, z \in \mathbb{R}$, so liegt eines dieser drei Elemente in dem Intervall, das von den beiden anderen begrenzt wird. – Ist etwa $z \in [x, y]$, so kann – genauer, muss – in obiger Definition $m = z$ gesetzt werden.

ii) $\mathbb{R}^n$ ist für $n \geq 2$ in der Euklidischen Norm kein Dreibeinraum. Genauer gibt es zu drei nicht kollinearen Punkten x, y, z in der Euklidischen Ebene keine drei Kreise mit jeweiligen Mittelpunkten x, y, z, so dass keine zwei dieser Kreise einen gemeinsamen inneren Punkt haben – und sich alle drei Kreise berühren.

iii) $\mathbb{R}^n$ ist – für jedes $n \in \mathbb{N}$ – in der *Manhattan-Metrik* ein Dreibeinraum:
Genauer ist für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ der *Median* $med(a_1, a_2, a_3)$ definiert durch

$$med(a_1, a_2, a_3) := a_{\sigma(2)},$$

wobei $\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ eine – nicht notwendig eindeutig bestimmte – Permutation ist mit $a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq a_{\sigma(3)}$.
Man beachte dabei: σ ist dann nicht eindeutig bestimmt, wenn mindestens zwei der drei Elemente $a_1, a_2.a_3$ übereinstimmen. Dann ist aber $med(a_1, a_2, a_3)$ dasjenige – eindeutig bestimmte – Element, das mindestens zweimal unter den Elementen a_1, a_2, a_3 auftritt.
Andernfalls ist $a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < a_{\sigma(3)}$; dann ist $med(a_1, a_2, a_3)$ dasjenige Element, das echt zwischen den beiden anderen liegt.

In jedem Fall gilt: Sind $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $z = (z_1, ...z_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so folgt für

$$m := (med(x_1, y_1, z_1), ..., med(x_n, y_n, z_n))$$

in der Manhattan-Metrik:

$$m \in [x, y] \cap [x, z] \cap [y, z].$$

Bemerkungen IV:
Wir haben gesehen, dass es Metrische Räume gibt, die Dreibeinräume sind – und solche, für die das nicht zutrifft.
Wir wollen nun feststellen: Sind x, y, z Elemente eines Metrischen Raumes $M = (S, d)$ mit $D := [x, y] \cap [x, z] \cap [y, z] \neq \emptyset$, so sind für jedes $m \in D$ die drei Abstände $d(x, m)$, $d(y, m)$, $d(z, m)$ eindeutig bestimmt: Diese drei Abstände ergeben sich nämlich als eindeutig bestimmte Lösung des Linearen Gleichungssystems

$$d(x, m) + d(y, m) = d(x, y),\ d(x, m) + d(z, m) = d(x, z),\ d(y, m) + d(z, m) = d(y, z).$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(x, m) &= \tfrac{1}{2} \cdot (d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)), \\ d(y, m) &= \tfrac{1}{2} \cdot (d(x, y) + d(y, z) - d(x, z)), \\ d(z, m) &= \tfrac{1}{2} \cdot (d(x, z) + d(y, z) - d(x, y)). \end{aligned}$$

Klar ist auch: Erfüllt ein Punkt $m \in S$ diese drei Gleichungen, so liegt er im Durchschnitt $[x, y] \cap [x, z] \cap [y, z]$.

In weiteren Beispielen werden wir noch sehen, dass der Punkt m selbst nicht durch diese drei Gleichungen eindeutig bestimmt ist.

Konvention V:
Für einen Punkt $x_0 \in S$ und $r \geq 0$ ist

$$B[x_0, r] := \{x \in S \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

die *abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius r.*

Definition VI:
Der Metrischer Raum $M = (S, d)$ heißt **hyperkonvex**, falls gilt:
Ist $(B[x_i, r_i])_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Kugeln in M, von denen je zwei einen nichtleeren Durchschnitt haben, so haben all diese Kugeln einen nichtleeren Durchschnitt.

Der folgende Satz zeigt die Bedeutung von hyperkonvexen Normierten Vektorräumen auf.

Satz VII:
Ist $(V, ||\,.\,||)$ ein beliebiger normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der gleichzeitig hyperkonvex ist, so ist V mit der induzierten Metrik ein Dreibeinraum.

Beweis: Seien $x, y, z \in V$ paarweise verschieden. Gemäß *Bemerkung IV* setzen wir:

$$\begin{aligned} r_x &:= \tfrac{1}{2} \cdot (d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)), \\ r_y &:= \tfrac{1}{2} \cdot (d(x, y) + d(y, z) - d(x, z)), \\ r_z &:= \tfrac{1}{2} \cdot (d(x, z) + d(y, z) - d(x, y)). \end{aligned}$$

Dann schneiden sich die abgeschlossenen Kugeln $B[x, r_x]$ und $B[y, r_y]$ – nämlich zumindest in einem Punkt der Verbindungsstrecke $\overline{xy}$. Analog folgt:

$$B[x, r_x] \cap B[z, r_z] \neq \emptyset,\ B[y, r_y] \cap B[z, r_z] \neq \emptyset.$$

Weil $(V, ||\,.\,||)$ hyperkonvex ist, folgt, dass auch der Durchschnitt der drei abgeschlossenen Kugeln $B[x, r_x]$, $B[y, r_y]$ und $B[z, r_z]$ nicht leer ist. Liegt ein Punkt m in diesem Durchschnitt, so folgt auch: $m \in [x, y] \cap [x, z] \cap [y, z]$.

□

Noch haben wir von keinen Raum nachgewiesen, dass er hyperkonvex ist.
Der folgende Satz liefert eines der einfachsten Beispiele.

Satz VIII:
Die Menge $\mathbb{R}$ ist – in der gewöhnlichen Metrik – hyperkonvex.

Beweis: Eine abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}$ – mit Mittelpunkt x_0 und Radius r – hat die Gestalt $[x_0 - r, x_0 + r]$. Sei nun eine beliebige Familie $I_i = [x_i - r_i, x_i + r_i], i \in I$, solcher – kompakter – Intervalle in $\mathbb{R}$ gegeben, von denen je zwei einen nichtleeren Durchschnitt haben. Weil all diese Mengen konvex und kompakt sind, liefert der Satz von Helly – für $n = 1$ in der Variation für kompakte und konvexe Mengen in $\mathbb{R}$, dass alle Mengen I_i einen nichtleeren Durchschnitt haben.

$\square$

Nun können wir sogar zeigen:

Satz IX:
Es sei $V = \mathbb{R}_b^E$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beschränkter reellwertiger Funktionen – auf irgendeiner nichtleeren Menge E. Dann ist V in der Supremumsnorm hyperkonvex – und damit auch ein Dreibeinraum.
Insbesondere folgt – mit $E = \{1, ..., n\}$: Alle Räume $\mathbb{R}^n$ sind – in der Supremumsnorm – hyperkonvex und somit Dreibeinräume.

Beweis: In V – mit der Supremumsnorm – hat jede abgeschlossene Kugel um ein $f_0 \in V$ mit Radius $r \geq 0$ folgende Gestalt:

$$B[f_0, r] = \{f \in V : |f(e) - f_0(e)| \leq r \text{ für alle } e \in E\}.$$

Wir betrachten nun eine beliebige Familie $(B[f_i, r_i])_{i \in I}$ von abgeschlossenen Kugeln in V, von denen je zwei einen nichtleeren Durchschnitt haben. Dann ist der Durchschnitt D all dieser abgeschlossenen Kugeln gegeben durch

$$\begin{aligned} D &= \{f \in V : |f(e) - f_i(e)| \leq r_i \text{ für alle } e \in E \text{ und alle } i \in I\} \\ &= \Pi_{e \in E} \left(\cap_{i \in I} \ [f_i(e) - r_i, \ f_i(e) + r_i] \right). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile sind – nach *Satz VIII* – alle auftretenden Durchschnitte von Intervallen nicht leer, weil je zwei einen nicht leeren Durchschnitt haben. – Nach dem Auswahlaxiom ist also auch das auftretende Kartesische Produkt nicht leer.

$\square$

Beispiel X:
In $\mathbb{R}^3$ – mit der Supremumsnorm – folgt nun noch ein Beispiel, das zeigt, dass drei Intervalle $[x, y], [x, z], [y, z]$ mehr als nur einen Punkt gemeinsam haben können: setze etwa

$$x := (0, 0, 0), \ y := (2, 0, 0), \ z := (1, 4, 0).$$

Dann folgt für $m_0 = (1, 1, 0)$ und für $m_1 = (1, 1, 1)$:

$$d(x, y) = 2, \ d(x, z) = 4, \ d(y, z) = 4;$$

$$d(x, m_0) = d(x, m_1) = 1, \ d(y, m_0) = d(y, m_1) = 1, \ d(z, m_0) = d(z, m_1) = 3.$$

Daher enthält der Durchschnitt $[x, y] \cap [x, z] \cap [y, z]$ beide Punkte m_0 und m_1.

Im folgenden werden wir noch zeigen, dass jeder beliebige Metrische Raum isometrisch in einen Vektorraum mit der Supremumsnorm eingebettet werden kann. Demnach ergibt sich, dass jeder Metrische Raum Teilraum eines Dreibeinraums ist.

Konvention XI:
Im folgenden sei $M = (S, d)$ ein beliebiger – nichtleerer – Metrischer Raum, und es sei $s_0 \in S$ fixiert.
Ferner definiere für $s \in S$ die Funktion $f_s : S \to \mathbb{R}$ durch

$$f_s(t) := d(s, t).$$

Satz XII:
Es sei $V = \mathbb{R}_b^S$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der beschränkten reellwertigen Funktionen auf S – mit der Supremumsnorm $||\,.\,||$.
Dann ist $\varphi : S \to V$, definiert durch

$$\varphi(s) := f_s - f_{s_0}$$

eine Isometrie von M nach V. Insbesondere folgt, dass M Teilraum eines Dreibeinraums ist.

Beweis: Die zweite Behauptung folgt sofort aus der ersten und *Satz IX*.

Zum Nachweis der ersten Behauptung bemerken wir zunächst für alle $s, t \in S$:

$$|f_s(t) - f_{s_0}(t) = |d(s, t) - d(s_0, t)| \leq d(s, s_0).$$

Weil der letzte Abstand nicht von t abhängt, ist $\varphi(s) = f_s - f_{s_0}$ eine beschränkte Funktion, also $\varphi(s) \in V$.

Weiter gilt nun für alle $s_1, s_2 \in S$ und $t \in S$:

$$|(\varphi(s_1))(t) - (\varphi(s_2))(t)| = |f_{s_1}(t) - f_{s_2}(t)| = |d(s_1, t) - d(s_2, t)| \leq d(s_1, s_2).$$

Andererseits gilt aber speziell:

$$|(\varphi(s_1))(s_2) - (\varphi(s_2))(s_2)| = |d(s_1, s_2) - d(s_2, s_2)| = d(s_1, s_2).$$

Damit folgt insgesamt

$$||\varphi(s_1) - \varphi(s_2)|| = d(s_1, s_2)$$

wie gewünscht.

$\square$

Bemerkung XIII:
Ist der gegebene Metrische Raum $M = (S, d)$ beschränkt, so kann φ auch definiert werden durch $\varphi(s) := f_s$. Damit aber $\varphi(s)$ im allgemeinen Fall eine beschränkte Funktion wird, haben wir statt dessen $\varphi(s) := f_s - f_{s_0}$ gesetzt.
Wie wir gesehen haben, folgt allgemein direkt aus der Dreiecksungleichung, dass $f_s - f_{s_0}$ für alle $s, s_0 \in S$ immer eine beschränkte Funktion ist.

Ist der Metrische Raum $M = (S, d)$ unbeschränkt, so sind die Funktionen f_s nicht im Vektorraum $V = \mathbb{R}_b^S$ aller *beschränkten* reellwertigen und auf S definierten Funktionen enthalten, wohl aber in einem affinen Raum, der zu V parallel ist; er entsteht durch *Verschiebung* um die Funktion f_{s_0}.

Wir wollen nun noch eine ganz andere Klasse von Dreibeinräumen betrachten.

Definition XIV: Ein Metrischer Raum $M = (T, d)$ heißt ein $\mathbb{R}$**-Baum**, falls die beiden folgenden Axiome erfüllt sind:

$(T1)$ Zu allen $p, q \in T$ gibt es eine eindeutig bestimmte Isometrie $\psi : [0, d(p,q)]$ mit:

$$\psi(0) = p,\ \psi(d(p,q)) = q.$$

$(T2)$ Für jede stetige und injektive Abbildung $f : [a,b] \to T$ mit $f(a) = p$ und $f(b) = q$ gilt:

$$f([a,b]) = \psi([0, d(p,q)]).$$

Bemerkungen XV:
$(T1)$ besagt: Zu je zwei Punkten $p, q \in T$ gibt es – bis auf die Parametrisierung – genau einen kürzesten Weg in T von p nach q; dieser Weg wird auch – die – Geodätische von p nach q genannt. Diese ist topologisch zusammenhängend.

Allein durch $(T1)$ wird nicht ausgeschlossen, dass es nicht noch einen weiteren Weg von p nach q geben kann, der einen anderen Verlauf hat als ψ – und länger ist. – Das ist nun nach $(T2)$ nicht möglich.

Insgesamt folgt auch noch: Das Intervall $[p, q]$ enthält genau die Punkte der Geodätischen von p nach q.

Satz XVI:
Jeder $\mathbb{R}$-Baum (T, d) ist ein Dreibeinraum.

Beweis: Es seien $p, q, z \in T$. Wir müssen zeigen, dass die Intervalle $[p,q], [q,z], [p,z]$ einen gemeinsamen Punkt haben. Dazu können wir annehmen: $z \notin [p,q], p \notin [q,z], q \notin [p,z]$.
Würden sich die Intervalle $[z,p]$ und $[p,q]$ nur in p schneiden, dann wäre die Vereinigung dieser beiden Intervalle das Bild einer stetigen und injektiven Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = z$ und $f(b) = q$. Nach $(T2)$ wäre dann aber $p \in [q,z]$ – im Widerspruch zu unserer Annahme.

Es folgt – weil der Durchschnitt $[z,p] \cap [p,q]$ abgeschlossen ist:
Es gibt ein $m \in [p,q] \setminus \{p,q\}$ mit $m \in [p,z]$ und $[m,q] \cap [p,z] = \{m\}$. Dann ist erst recht $[z,m] \cap [m,q] = \{m\}$. Es folgt, dass $[z,m] \cup [m,q]$ das Bild einer stetigen und injektiven Abbildung $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ mit $g(c) = z$ und $g(d) = q$ ist. Mit $(T2)$ folgt dann also $m \in [q,z]$ wie gewünscht.

$\square$

Literatur:
Dress, A.W.M., Moulton, V., Terhalle, W.: T-Theory: An Overview, Europ. J. Combinatorics 17, 161 – 175 (1996).
Isbell, J.R.: Six theorems about injective metric spaces, Comment. Math. Helv. 39, 65 – 76 (1964).