11. Übungsblatt zu “Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler”

Leipzig, den 24.6.2021

41.) Beweisen Sie Satz 2.16 der Vorlesung:

Es sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und $f : D \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar. Ferner sei $x_0 \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$ so, dass für alle $t \in [0,1]$ gilt: $x_0 + t \cdot v \in D$. Dann existiert ein $t_0 \in [0,1]$, so dass gilt:

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + \bigtriangledown f(x_0) \bullet v + \frac{1}{2} \cdot H_f(x_0 + t_0 \cdot v)(v,v).$$

Hinweis: Wenden Sie Satz I 4.16 – die im Wintersemester bewiesene Taylorformel für Funktionen in einer Variablen – an auf die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, *definiert durch* $g(t) := f(x_0 + t \cdot v)$. *Dazu müssen Sie* g *zweimal mittels Satz 2.13 – der Kettenregel für vektorwertige Funktionen in mehreren Variablen – ableiten.*

42.) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := x^3 - y^3 - 3xy.$$

Bestimmen Sie von f die lokalen Extremstellen und die Sattelpunkte.

43i) Entscheiden Sie mit Begründung, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen – an die Koeffizienten a, b, c – die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$ positiv definit ist.

ii) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := x^2 - 2xy + 5y^2 + 8x - 2y.$$

Verifizieren Sie, dass f genau eine globale Minimalstelle hat, und bestimmen Sie diese.

44.) Bestimmen Sie – mit Begründung – alle globalen Minimalstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) := e^{3x} \cdot y^2$.