5. Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Abgabe: Bis **Montag 17.5.** um **12 Uhr** im Moodle-Kurs bei Frau Kliem. Alle Abgaben sind mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Für $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir:

$$x \diamond y := xy \qquad \text{und} \qquad \lambda \odot x := x^\lambda$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}_+, \diamond, \odot)$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet.

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte)**.** Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei den folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ handelt (begründen Sie Ihre Antworten).

(i) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + y = z \right\}$

(iii) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : xy = 2z \right\}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V.
Zeigen Sie: $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V genau dann, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Aufgabe 4 (2+1 Punkte)**.** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, seien $U, W \subseteq V$ Unterräume von V und seien $a, b \in V$. Zeigen Sie:
1) Ist $b \in a + U$, so ist $a + U = b + U$.
2) Aus $a + U = b + W$ folgt $U = W$.