Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematatik II für Wirtschaftswissenschaftler

Kommentare zum Kapitel 1.3 – Skalarprodukt und Orthogonalität

1.) *Skalarprodukt und Längen*
Grundlage dieses Kapitels ist das in Definition 1.12 definierte *Skalarprodukt* zweier Vektoren in $\mathbb{R}^n$.
Aus der Schule ist vielleicht eher eine andere Definition geläufig:
Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist das Produkt der beiden Längen und dem Cosinus des Winkels, der von den beiden Vektoren gebildet wird.
Die Äquivalenz dieser beiden Definitionen soll in einer späteren Übungsaufgabe bewiesen werden.
Zum Rechnen ist Definition 1.12 praktischer. – Hieraus ergeben sich sofort folgende Rechenregeln für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$, siehe dazu auch Aufgabe 6.):

$$\begin{gathered} x \bullet y = y \bullet x \quad ; \\ x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z, (x+y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z \quad ; \\ (r \cdot x) \bullet y = x \bullet (r \cdot y) = r \cdot (x \bullet y). \end{gathered}$$

Die Länge eines Vektors wird in Definition 1.13 so definiert, dass sich – insbesondere in $\mathbb{R}^2$ – nach dem Satz des Pythagoras die "gewöhnliche" Länge ergibt.

Beispiel: Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (4,0), (4,3)$. Die beiden Katheten haben die Länge 4 bzw. 3; die Hypotenuse hat die Länge

$$\sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{(4,3) \bullet (4,3)} = \sqrt{25} = 5.$$

2.) *Orthogonalität*
Hinsichtlich Definition 1.14 und der nachfolgenden Bemerkung beachte man, dass – aufgrund obiger Rechenregeln – allgemein gilt:

$$\begin{gathered} ||x+y||^2 - (||x||^2 + ||y||^2) \\ = (x+y) \bullet (x+y) - x \bullet x - y \bullet y \\ = x \bullet x + x \bullet y + y \bullet x + y \bullet y - x \bullet x - y \bullet y \\ = 2 \cdot x \bullet y. \end{gathered}$$

Nach dem Satz von Pythagoras hat der oberste – und damit jeder – Term dieser Gleichungskette genau dann den Wert 0, wenn die Vektoren x und y einen rechten Winkel einschließen.

Das "orthogonale Komplement" $H^\perp$ eines Unterraums H von $\mathbb{R}^n$ besteht – definitionsgemäß – aus allen Vektoren, die auf jedem Vektor aus H senkrecht stehen.

Man beachte aber folgendes:
In $\mathbb{R}^3$ steht die x_1x_2-Ebene $E_1 := \{(x_1, x_2, 0) \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ – rein anschaulich – senkrecht auf der x_2x_3-Ebene $E_2 := \{(0, x_2, x_3) \,|\, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$. Das orthogonale Komplement zu E_1 besteht aber nur aus der x_3-Achse, die eine echte Teilmenge von E_2 ist.

Der wichtigste Satz von Kapitel 1.3 – Satz 1.4 – sei hier noch einmal mit einem etwas ausführlicherem Beweis wiederholt:

Satz 1.4:
Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum. Dann lässt sich jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eindeutig zerlegen in

$$x = x^H + x^\perp$$

mit $x^H \in H$ und $x^\perp \in H^\perp$.

Beweis:
Existenz der Zerlegung – durch Induktion nach $d = dim(H)$:

Induktionsanfang: Für $d = 0$ ist $H = \{0\}$ und $H^\perp = \mathbb{R}^n$.
Die gewünschte Zerlegung ist also $x = 0 + x$.

Induktionsschritt: Sei $d > 0, H = span(\{h_1, ..., h_{d-1}, h_d\})$ sowie $H' := span(\{h_1, ..., h_{d-1}\})$.

Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf H' statt H, existieren Vektoren $x^{H'}, h_d^{H'} \in H'$ sowie $\tilde{x}, \tilde{h}_d \in (H')^\perp$ mit:

$$x = x^{H'} + \tilde{x},\ h_d = h_d^{H'} + \tilde{h}_d.$$

Wir setzen noch

$$x_d^{\tilde{h}} := \frac{1}{||\tilde{h}_d||^2} \cdot (\tilde{x} \bullet \tilde{h}_d) \cdot \tilde{h}_d$$

sowie

$$x^H := x^{H'} + x_d^{\tilde{h}},\ x^\perp := \tilde{x} - x_d^{\tilde{h}}.$$

Mit h_d und $h_d^{H'}$ sind auch $\tilde{h}_d$ und $x_d^{\tilde{h}}$ in dem Unterraum H enthalten. Also ist auch $x^H \in H$ sowie

$$x^\perp \bullet \tilde{h}_d = \tilde{x} \bullet \tilde{h}_d - x_d^{\tilde{h}} \bullet \tilde{h}_d = \tilde{x} \bullet \tilde{h}_d \cdot (1 - \frac{1}{||\tilde{h}_d||^2} \cdot \tilde{h}_d \bullet \tilde{h}_d) = 0.$$

Folglich ist $x^\perp \in \{h_1, ..., h_{d-1}, \tilde{h}_d\}^\perp = \{h_1, ..., h_{d-1}, h_d\}^\perp = H^\perp$.

Eine gewünschte Zerlegung von x ist also gegeben durch $x = x^H + x^\perp$.

Eindeutigkeit der Zerlegung:

Es sei $x = x_1^H + x_1^\perp = x_2^H + x_2^\perp$ mit $x_i^H \in H$ und $x_i^\perp \in H^\perp$ für $i = 1, 2$.

Dann folgt:

$$x_1^H - x_2^H = x_2^\perp - x_1^\perp \in H \cap H^\perp.$$

Das bedeutet:

$$||x_1^H - x_2^H||^2 = (x_1^H - x_2^H) \bullet (x_1^H - x_2^H) = (x_1^H - x_2^H) \bullet (x_2^\perp - x_1^\perp) = 0.$$

Folglich ist $x_1^H = x_2^H$ und damit auch $x_1^\perp = x_2^\perp$.

q.e.d.

Nun noch folgende Anmerkung zur – wichtigen – Beziehung $(H^\perp)^\perp = H$ in Korollar 1.1:

Trivial ist nur die Beziehung $H \subset (H^\perp)^\perp$.
Die Gleichheit ergibt sich erst mittels der folgenden Gleichungskette, die nach dem gerade bewiesenen Satz 1.4 gilt:

$$dim(H^\perp)^\perp = n - dim(H^\perp) = dim(H).$$

Hier wird auch gebraucht: Zwei Unterräume von $\mathbb{R}^n$ sind gleich, wenn sie die gleiche Dimension haben und mindestens einer der beiden eine Teilmenge des anderen ist.