4. Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Abgabe: Bis **Montag 10.5.** um **12 Uhr** im Moodle-Kurs bei Frau Kliem. Alle Abgaben sind mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Form $a + ib$ mit reellem a und b dar (Rechenweg mit angeben).

$$(a)\ \ (3+4i)(2+5i) \qquad (b)\ \ \frac{1}{2-3i} \qquad (c)\ \ \frac{1-3i}{2+i}$$

Aufgabe 2 (1+2 Punkte)**.** Seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie:

(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(ii) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** In Übung 2 hatten Sie bereits mittels vollständiger Induktion gezeigt, dass $n^3 + 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.
Beweisen Sie diese Aussage nun erneut, aber diesmal ohne vollständige Induktion.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Eine Primzahl p heißt *Sophie-Germain-Primzahl*, fall auch $2p + 1$ wieder eine Primzahl ist.[1]
Zeigen Sie: Ist $p > 3$ eine Sophie-Germain-Primzahl, so gilt $p \equiv 5 \mod 6$.

[1] Zum Beispiel sind 2, 3, 5, 11 und 23 Sophie-Germain-Primzahlen, 7, 13, 17 und 19 dagegen nicht. Benannt sind diese Zahlen nach der französischen Mathematikerin Sophie Germain (1776–1831). Es wird vermutet, dass unendlich viele Sophie-Germain-Primzahlen existieren, aber ein Beweis dafür konnte bislang nicht gefunden werden.