Lösungen Übung 12

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es sei g die Gerade durch a und b und h die Gerade durch c und d.
1) Bestimmen Sie den Abstand von p zu g.
2) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden g und h.

Lösung:
1) Wir verwenden Satz VII.4.7.
Es gilt zunächst $g = G(a, v)$, wobei $v = b - a = (0, -1, 1)^T$.
Damit ist $\|v\|_2^2 = 2$ und für den Lotfußpunkt von p auf g ergibt sich

$$\begin{aligned} q &= a + \langle p - a, v \rangle \frac{v}{\|v\|_2^2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den Abstand von p zu g folgt $d(p, g) = \|p - q\|_2 = \sqrt{1/4 + 1/4} = 1/\sqrt{2}$.
2) Hier verwenden wir Satz VII.4.11.
Es gilt $h = G(c, w)$, wobei $w = d - c = (-1, -1, 3)^T$.
Es ist

$$v \times w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $\|v \times w\|_2 = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$.
Damit folgt für den Abstand von g und h:

$$d(g, h) = \frac{|\langle a - c, v \times w \rangle|}{\|v \times w\|_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Seien

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und sei $E = a + \operatorname{span}\{v, w\}$.
Bestimmen Sie den Abstand von p zur Ebene E.

Lösung: Wir verwenden Satz VII.4.19.
Zunächst ist

$$v \times w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Als Normaleneinheitsvektor für E erhalten wir somit

$$x_0 := \frac{v \times w}{\|v \times w\|_2} = \frac{1}{\sqrt{170}} \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

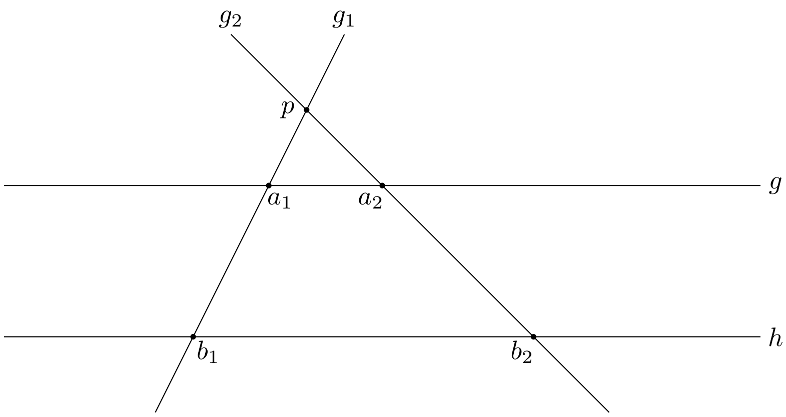
Mit $s = \langle a, x_0 \rangle = 42/\sqrt{170}$ gilt dann $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x_0 \rangle = s\}$.
Für den Abstand von p zu E folgt:

$$d(p, E) = |\langle x_0, p \rangle - s| = \frac{1}{\sqrt{170}} \left| \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle - 42 \right| = \frac{47}{\sqrt{170}}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Gegeben seien Geraden g_1, g_2, g, h im $\mathbb{R}^n$ mit $g_1 \neq g_2$ und $g \parallel h$. Weiter seien $a_1, a_2, b_1, b_2, p \in \mathbb{R}^n$ paarweise verschieden und es gelte: $p \in g_1 \cap g_2$, $a_1 \in g_1 \cap g$, $a_2 \in g_2 \cap g$, $b_1 \in g_1 \cap h$, $b_2 \in g_2 \cap h$. Siehe dazu auch die folgende Skizze.
Beweisen Sie den *Strahlensatz*:

$$\frac{\|p - a_1\|_2}{\|p - b_1\|_2} = \frac{\|a_1 - a_2\|_2}{\|b_1 - b_2\|_2} = \frac{\|p - a_2\|_2}{\|p - b_2\|_2}$$

Skizze zum Strahlensatz



Lösung: Es gilt $g = G(a_1, a_2 - a_1)$ und $h = G(b_2, b_2 - b_1)$. Da g und h parallel sind, folgt: Es existiert ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $b_2 - b_1 = \gamma(a_2 - a_1)$.
Ferner gilt $g_1 = G(p, a_1 - p)$ und $g_2 = G(p, a_2 - p)$ und wegen $b_1 \in g_1$, $b_2 \in g_2$ folgt: Es existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$b_1 = p + \alpha(a_1 - p) \quad \text{und} \quad b_2 = p + \beta(a_2 - p).$$

Daraus folgt

$$\gamma(a_2 - a_1) = b_2 - b_1 = \beta(a_2 - p) - \alpha(a_1 - p)$$

und somit

$$\begin{aligned}
&(\gamma - \alpha)(a_1 - p) + (\beta - \gamma)(a_2 - p) \\
&= \gamma a_1 - \gamma p - \alpha(a_1 - p) + \beta(a_2 - p) - \gamma a_2 + \gamma p \\
&= \gamma(a_1 - a_2) + \beta(a_2 - p) - \alpha(a_1 - p) = 0.
\end{aligned}$$

Da g_1 und g_2 nicht parallel sind, sind die Vektoren $a_1 - p$ und $a_2 - p$ linear unabhängig. Daher folgt $\alpha = \beta = \gamma$.
Damit erhalten wir

$$\frac{\|p - a_1\|_2}{\|p - b_1\|_2} = \frac{\|p - a_1\|_2}{\|\alpha(p - a_1)\|_2} = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{|\gamma|} = \frac{\|a_1 - a_2\|_2}{\|\gamma(a_1 - a_2)\|_2} = \frac{\|a_1 - a_2\|_2}{\|b_1 - b_2\|_2}$$

und analog auch

$$\frac{\|p - a_2\|_2}{\|p - b_2\|_2} = \frac{1}{|\beta|} = \frac{1}{|\gamma|} = \frac{\|a_1 - a_2\|_2}{\|b_1 - b_2\|_2}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei $v_\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt offensichtlich $v \perp v_\perp$ und $\|v\|_2 = \|v_\perp\|_2$.

Gegeben seien nun $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq b$. Wir setzen

$$M_{a,b} = \frac{a + b}{2} + \operatorname{span}\{(b - a)_\perp\}.$$

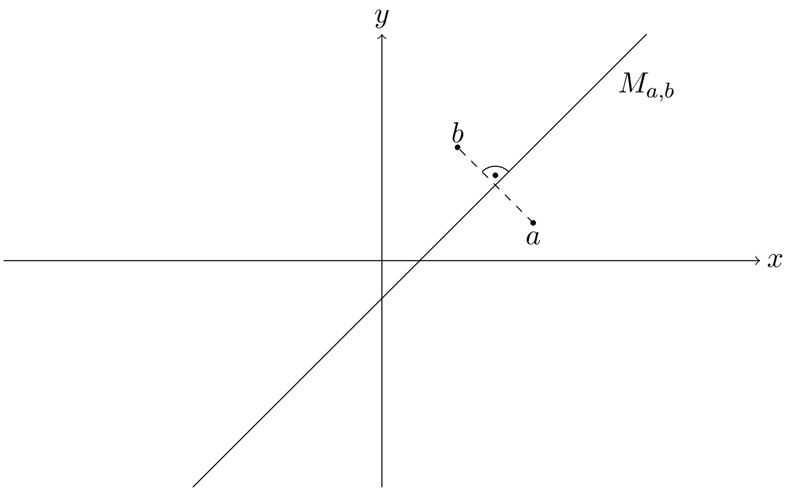
Man nennt die Gerade $M_{a,b}$ die *Mittelsenkrechte* von a und b, denn sie verläuft durch den Mittelpunkt $(a + b)/2$ in der Richtung senkrecht zum Verbindungsvektor $b - a$ (siehe die folgende Skizze).

Zeigen Sie:

$$M_{a,b} = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|a - p\|_2 = \|b - p\|_2\},$$

d. h. die Mittelsenkrechte besteht genau aus jenen Punkten, die zu a denselben Abstand haben wie zu b.

Mittelsenkrechte von a und b



Lösung: Wir setzen zur Abkürzung $m = (a+b)/2$ und $U = \operatorname{span}\{b-a\}$.
Da der Raum $U^\perp$ eindimensional sein muss (vgl. Satz VII.2.9. im Skript), folgt $U^\perp = \operatorname{span}\{(b-a)_\perp\}$.
Für alle $p \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
&\|p-a\|_2^2 = \|p-m+m-a\|_2^2 = \langle p-m+m-a, p-m+m-a\rangle \\
&= \langle p-m, p-m\rangle + 2\langle p-m, m-a\rangle + \langle m-a, m-a\rangle \\
&= \|p-m\|_2^2 + 2\langle p-m, m-a\rangle + \|m-a\|_2^2 \\
&= \|p-m\|_2^2 + \langle p-m, b-a\rangle + \frac{1}{4}\|b-a\|_2^2
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
&\|p-b\|_2^2 = \|p-m+m-b\|_2^2 \\
&= \|p-m\|_2^2 + 2\langle p-m, m-b\rangle + \|m-b\|_2^2 \\
&= \|p-m\|_2^2 - \langle p-m, b-a\rangle + \frac{1}{4}\|b-a\|_2^2.
\end{aligned}$$

Also gilt $\|p-a\|_2 = \|p-b\|_2 \Leftrightarrow \langle p-m, b-a\rangle = -\langle p-m, b-a\rangle \Leftrightarrow \langle p-m, b-a\rangle = 0$.
Letzteres ist äquivalent zu $p - m \in U^\perp$, was wiederum äquivalent ist zu $p \in m + U^\perp = M_{a,b}$. Damit ist der Beweis abgeschlossen.