7. Übungsblatt zu "Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 28.5.2021

25.) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Verifizieren Sie:

$$det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (d-a) \cdot (c-b) \cdot (d-b) \cdot (d-c).$$

26.) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$. Zeigen Sie:

$$det(A) = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot (a_{33} \cdot a_{44} - a_{34} \cdot a_{43}).$$

27.) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; A_2 := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von A_1 und A_2 sowie jeweils alle zugehörigen Eigenvektoren.

28.) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$. Beweisen Sie, dass die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

zwei *verschiedene* – reelle – Eigenwerte λ_1, λ_2 hat.

Anmerkungen: Man kann zeigen, dass jeder Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 auf jedem Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 senkrecht steht.
Eine ähnliche – allerdings weniger offensichtliche – Aussage gilt auch für beliebige symmetrische $n \times n$-Matrizen für alle $n \geq 3$. Siehe hierzu auch das Ende der umgehend zu erscheinenden Rubrik

Transponierte Matrizen, Symmetrische Matrizen und Eigenwerte.