

## Lösungen Übung 13

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Wir betrachten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte von  $A$  sowie die zugehörigen Eigenräume. Ist  $A$  diagonalisierbar?

*Lösung:* Für das charakteristische Polynom von  $A$  gilt:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 3 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 2) + 2\lambda - 4 - 6 - 3\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 + 3\lambda + 2 - \lambda - 10 \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 \end{aligned}$$

Man sieht leicht  $\chi_A(2) = 0$  und mittels Polynomdivision erhält man die Faktorisierung  $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$ .

Die Eigenwerte von  $A$  sind also 2 (mit algebraischer Vielfachheit 2) und  $-2$  (mit algebraischer Vielfachheit 1).

Es gilt

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen gelangt man zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist der Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert 2

$$E_A(2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Außerdem gilt

$$A + 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen gelangt man hier zu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und daher ist der Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert  $-2$

$$E_A(-2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es haben also beide Eigenwerte die geometrische Vielfachheit 1, aber der Eigenwert 2 hat die algebraische Vielfachheit 2. Daher ist  $A$  nicht diagonalisierbar.

**Aufgabe 2** (6 Punkte). Wir betrachten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren Sie  $A$ , d. h. bestimmen Sie explizit eine Diagonalmatrix  $D$ , eine invertierbare Matrix  $T$  und ihre Inverse  $T^{-1}$ , so dass  $TAT^{-1} = D$  gilt.

*Lösung:* Für das charakteristische Polynom von  $A$  gilt:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) + 3\lambda - 6 + 8 - 2\lambda = 3\lambda^2 - 3\lambda - 18 - \lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + \lambda + 2 \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda - 16 \end{aligned}$$

Man sieht leicht  $\chi_A(2) = 0$  und mittels Polynomdivision erhält man die Faktorisierung  $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$

Es gilt  $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$ . Die Eigenwerte von  $A$  sind also 2,  $-2$  und 4, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1.

Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus bestimmt man die zugehörigen Eigenräume:

$$E_A(2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_A(-2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_A(4) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Somit bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine geordnete Basis des  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Diese nennen wir  $\mathcal{B}$ .  
Zudem sei  $\mathcal{A}$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

Sei  $T = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$  die zugehörige Basiswechselmatrix.

Dann gilt

$$T^{-1} = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D.$$

Die Matrix  $T = (T^{-1})^{-1}$  kann man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus bestimmen:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$