14. Übung zur Vorlesung Lineare Algebra
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Abgabe: Bis **Montag 19.7.** um **12 Uhr** im Moodle-Kurs bei Frau Kliem. Alle Abgaben sind mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und es bezeichne $\|A\|_Z$ die Zeilensummennorm von A.
1) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_Z \|x\|_\infty$$

2) Nun sei C eine Konstante mit $\|Ax\|_\infty \leq C\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass $\|A\|_Z \leq C$ gilt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix mit $a_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei D die Diagonalmatrix mit den Einträgen $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ auf der Hauptdiagonalen. Ferner sei $N_i = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\|E_n - D^{-1}A\|_Z < 1$

(ii) $\sum_{j \in N_i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ für alle $i = 1, \ldots, n$ (A ist strikt diagonaldominant).

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende strikt diagonaldominante Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Ferner sei $b = (1\ 1\ 1)^T$ und wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.
1) Berechnen Sie die ersten beiden Iterationen x_1 und x_2 des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $x_0 = (0\ 0\ 0)^T$.
2) Berechnen Sie zum Vergleich auch die exakte Lösung von $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.