Universität Leipzig,
Mathematisches Institut,
Dr. Walter Wenzel

Probe-Klausur zu "Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler"

Donnerstag, 15. Juli 2021

Erlaubte Hilfsmittel: Alle schriftlichen Unterlagen.
Falls elektronische Hilfsmittel – etwa ein Taschenrechner – benutzt werden, müssen die Rechnungen aber auch ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar sein.

Bitte lesen Sie alle Aufgaben und das Merkblatt gründlich!

Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden.

Auf jeder Seite ist ein Rand von $4cm$ Breite zu lassen.

In den Endergebnissen sind etwaige Brüche entweder vollständig zu kürzen oder in Dezimalzahlen zu verwandeln.
Ferner sind alle Wurzeln zu berechnen, wenn die Ergebnisse rationale Zahlen sind.

Alle Ausführungen sind zu begründen!

1.) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem – nach irgendeinem Verfahren, wobei aber der Lösungsweg erkennbar sein muss:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \ \wedge \ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -16 \ \wedge \ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2.$$

Entscheiden Sie außerdem, was für eine geometrische Konfiguration vorliegt, falls die Lösungsmenge nicht leer ist.

(10 Punkte)

2.) Bestimmen Sie die Ränge der beiden folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 19 & 11 & 1 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

3.) Gegeben seien die beiden Vektoren $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Geben Sie entweder – mit Begründung – eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ an, deren Kern von den beiden Vektoren v und w erzeugt wird – oder begründen Sie, warum es solch eine lineare Abbildung nicht geben kann.

(8 Punkte)

4.) Bestimmen Sie von der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

sämtliche Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenräume; das sind die jeweiligen Mengen aller Eigenvektoren.

(12 Punkte)

5.) Es seien a, b zwei fixierte positive reelle Zahlen. Wir definieren die – differenzierbare – Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(t) := (a \cdot cos(t), b \cdot sin(t)).$$

Es handelt sich dabei um eine Kurve, die den Rand einer *Ellipse* beschreibt.

i) Bestimmen Sie im Falle $a > b$ – mit Begründung – alle $t \in [0, 2\pi]$, für die der Tangentenvektor $f'(t)$ senkrecht auf $f(t)$ steht.

ii) Was ändert sich im Falle $a = b$? Was für eine Kurve wird dann durchlaufen?

(8 Punkte)

6.) Bestimmen Sie die – eindeutig bestimmte – globale Maximalstelle der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := (2x + 5y) \cdot e^{-x^2 - 5 \cdot y^2}.$$

Berechnen Sie auch den maximalen Funktionswert. – Dabei reicht es, in der auftretenden Potenz e^{-t} den Exponenten t komplett auszurechnen, ohne dann diese Potenz weiter zu berechnen.

Hinweis: Sie können ohne Beweis voraussetzen:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $R > 0$, so dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus ([-R, R] \times [-R, R])$ gilt: $0 \le |f(x, y)| < \epsilon$.
Überlegen Sie sich weiter – mit Begründung, dass ein Punkt (x, y) nur dann globale Maximalstelle von f sein kann, wenn $x \ge 0$ und $y \ge 0$ ist.

(12 Punkte)