Walter Wenzel
Universität Leipzig
Mathematatik II für Wirtschaftswissenschaftler

Kommentare zum zweiten Teil von Kapitel 1.5 – Matrizen – ab Definition 1.23

Im ersten Teil der Kommentare zu Kapitel 1.5 lag der für die Praxis wichtigste Aspekt darin, eine gegebene Matrix durch zulässige Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform zu bringen, ohne dass sich die Lösungsmenge des zugehörigen – homogenen – linearen Gleichungssystems ändert. Nun soll es genauer um die Analyse der Lösungsmenge gehen.

Wir beginnen mit der Angabe einer Matrix A, die – gemäß Definition 1.23 – in *diagonalisierter Zeilenstufenform* gegeben ist:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir möchten nun allerdings einsehen, dass diese Matrix ein Gegenbeispiel zu Satz 1.9 liefert; das heißt:

Satz 1.9 ist in vorliegender Form falsch!

Die Matrix A ist aber in diagonalisierter Zeilenstufenform gegeben:

Die 1 oben links bildet den einzigen Diagonaleintrag, der von 0 verschieden ist, und die erste Spalte von A ist der erste Euklidische Standard-Basisvektor.
Die Nullzeilen von A sind genau die dritte und die vierte Zeile. Nach Streichung von diesen Zeilen bleiben die beiden ersten Zeilen, die eine Matrix in Zeilenstufenform bilden.
Die Voraussetzungen von Definition 1.23 sind also erfüllt!

Laut Vorschrift in Satz 1.9 erhält man aber die beiden Vektoren

$$h_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter steht zwar h_1 auf allen Zeilenvektoren von A senkrecht; das gilt aber nicht für h_2:

Es ist $(1, 4, 0, 2) \bullet (2, -3, 0, -1) = 2 - 12 + 0 - 2 = -12 \neq 0$.
Entgegen der Behauptung in Satz 1.9 ist also $h_2 \notin Kern(A)$.
Somit ist Korollar 1.4 ebenfalls falsch.

Die Rechnungen in den Beispielen 1.17 und 1.19 sind aber korrekt.

Wir betrachten nun noch ein spezielles – *homogenes* – lineares Gleichungssystem, dessen Matrix A in Zeilenstufenform gegeben ist:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Gleichungen lauten:

$$\mathbf{x_1} + 2x_2 - 3x_4 = 0, \ \mathbf{x_3} - 2x_4 = 0, \ \mathbf{x_5} = 0.$$

Weil die Matrix A in Zeilenstufenform gegeben ist, erhält man auf folgende Weise Lösungen: Die Variablen, die in keiner Gleichung fett markiert sind, sind frei wählbar; dann lassen sich die fett markierten auf eindeutige Weise berechnen. Die gegebene Matrix hat 5 Spalten und den Rang 3; die Lösungsmenge hat also die Dimension $5-3=2$. Wir suchen daher zwei linear unabhängige Lösungen, indem wir für x_2 und x_4 jeweils zwei Ansätze darlegen, die in jedem Fall zu zwei linear unabhängigen Vektoren führen:

Setzen wir $x_2 = 1$ und $x_4 = 0$, so liefern obige Gleichungen:

$$x_5 = 0,\ x_3 = 2x_4 = 0,\ x_1 = 3x_4 - 2x_2 = -2.$$

Setzen wir dagegen umgekehrt $x_2 = 0$ und $x_4 = 1$, so erhalten wir:

$$x_5 = 0,\ x_3 = 2x_4 = 2, x_1 = 3x_4 - 2x_2 = 3.$$

Zwei linear unabhängige Lösungsvektoren sind also gegeben durch:

$$v_1 = (-2, 1, 0, 0, 0),\ v_2 = (3, 0, 2, 1, 0).$$

Nun gehen wir über zu inhomogenen linearen Gleichungssystemen. Vektoriell kann ein solches wie folgt beschrieben werden:

Gegeben seien $v_1, ..., v_k, b \in \mathbb{R}^n$, gesucht sind reelle Zahlen $t_1, ..., t_k$ mit

$$t_1 \cdot v_1 + ... + t_k \cdot v_k = b.$$

Das *zugehörige homogene* lineare Gleichungssystem erhält man dadurch, dass der Vektor b durch den Nullvektor ersetzt wird.
Eine theoretisch zentrale Beobachtung ist hier Korollar 1.5:

Ist $t = (t_1, ..., t_k)$ *eine spezielle* Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems, und durchläuft n *alle* Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems, so durchläuft die Summe $\tilde{t} = t + n$ alle Lösungen des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems.
Das bedeutet: Kennt man eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems und alle Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems, so kennt man auch alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems.

Weiterhin gibt Lemma 1.4 an, wie man auf einfache Weise eine spezielle Lösung erhält, wenn die Koeffizientenmatrix A in Zeilenstufenform gegeben ist – was ja nach zulässigen Zeilenoperationen erreicht werden kann.

Zusammenfassend sei hier auch auf das "Kochrezept" auf Seite 70 verwiesen.

Erwähnt sei an dieser Stelle auch bereits:

Hat eine Matrix M genau n Zeilen und ebenfalls n Spalten, so ist ein lineares Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix M genau dann eindeutig lösbar, wenn M auch den Rang n hat. – Das ist mit den bisherigen Mitteln nicht schwer einzusehen, folgt aber noch eleganter mittels später zu entwickelnder Methoden.

Am Ende noch ein Beispiel – das das obige ergänzen soll:
Wir betrachten jetzt das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{x_1} + 2x_2 - 3x_4 = 7,\ \mathbf{x_3} - 2x_4 = -11,\ \mathbf{x_5} = 3.$$

Wir erhalten nun eine spezielle Lösung, indem wir jede fett markierte Variable gleich der Zahl auf der rechten Seite der entsprechenden Gleichung setzen und diejenigen Variablen, die nirgendwo fett markiert sind, gleich 0 setzen; siehe dazu auch Lemma 1.4. Das bedeutet: $x_1 = 7,\ x_2 = 0,\ x_3 = -11,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3.$

Nach dem bereits oben gerechneten Beispiel und dem bereits erwähnten Korollar 1.5 ist also die gesamte Lösungsmenge des akuten linearen Gleichungssystems gegeben durch

$$\mathbb{L} = \{(7, 0, -11, 0, 3) + \lambda_1 \cdot (-2, 1, 0, 0, 0) + \lambda_2 \cdot (3, 0, 2, 1, 0)\,|\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$