Lösungen Übung 3

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.**
Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:
(a) $\mathrm{ggT}(2037, 889)$
(b) $\mathrm{ggT}(4191, 1551)$
Geben Sie jeweils Ihren Rechenweg mit an.

Lösung:
(a) Der Euklidische Algorithmus liefert:

$$\begin{aligned}
2037 &= 2 \cdot 889 + 259\\
889 &= 3 \cdot 259 + 112\\
259 &= 2 \cdot 112 + 35\\
112 &= 3 \cdot 35 + 7\\
35 &= 5 \cdot 7 + 0
\end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(2037, 889) = 7$.
(b) Der Euklidische Algorithmus liefert:

$$\begin{aligned}
4191 &= 2 \cdot 1551 + 1089\\
1551 &= 1 \cdot 1089 + 462\\
1089 &= 2 \cdot 462 + 165\\
462 &= 2 \cdot 165 + 132\\
165 &= 1 \cdot 132 + 33\\
132 &= 4 \cdot 33 + 0
\end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(4191, 1551) = 33$.

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)**.** Auf der Menge $\mathbb{R}^3 := \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ definieren wir eine Verknüpfung durch

$$(a_1, b_1, c_1) * (a_2, b_2, c_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + a_1 b_2).$$

1) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^3, *)$ eine Gruppe bildet.
2) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^3, *)$ nicht kommutativ ist.

Bemerkung: $(\mathbb{R}^3, *)$ ist die sogenannte *Heisenberg-Gruppe*, die in der Quantenmechanik von Bedeutung ist.

Lösung:
1) Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned}
&(a_1, b_1, c_1) * ((a_2, b_2, c_2) * (a_3, b_3, c_3)) \\
&= (a_1, b_1, c_1) * (a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3 + a_2 b_3) \\
&= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + c_3 + a_2 b_3 + a_1(b_2 + b_3)) \\
&= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + a_1 b_2 + c_3 + (a_1 + a_2) b_3) \\
&= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + a_1 b_2) * (a_3, b_3, c_3) \\
&= ((a_1, b_1, c_1) * (a_2, b_2, c_2)) * (a_3, b_3, c_3)
\end{aligned}$$

Neutrales Element ist $(0, 0, 0)$, denn

$$\begin{aligned}
&(a, b, c) * (0, 0, 0) = (a, b, c + a0) = (a, b, c) \\
&= (a, b, c + 0b) = (0, 0, 0) * (a, b, c).
\end{aligned}$$

Inverses Element zu (a, b, c) ist $(-a, -b, ab - c)$, denn

$$\begin{aligned}
&(a, b, c) * (-a, -b, ab - c) = (0, 0, c + ab - c - ab) \\
&= (0, 0, 0) = (0, 0, ab - c + c - ab) = (-a, -b, ab - c) * (a, b, c).
\end{aligned}$$

2) Zum Beispiel ist

$$(0, 1, 0) * (1, 1, 0) = (1, 2, 0) \neq (1, 2, 1) = (1, 1, 0) * (0, 1, 0).$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Sei $(G, *)$ eine Gruppe und seien $a, b \in G$.
Zeigen Sie:

$$a * b = b * a \quad \Rightarrow \quad a * b^{-1} = b^{-1} * a$$

Lösung:
Es gelte $a * b = b * a$ und es bezeichne e das neutrale Element von $(G, *)$.
Dann gilt

$$a = a * e = a * (b * b^{-1}) = (a * b) * b^{-1} = (b * a) * b^{-1} = b * (a * b^{-1})$$

und folglich

$$b^{-1} * a = b^{-1} * (b * (a * b^{-1})) = (b^{-1} * b) * (a * b^{-1}) = e * (a * b^{-1}) = a * b^{-1}.$$