Lösungen Übung 5

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Für $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir:

$$x \diamond y := xy \qquad \text{und} \qquad \lambda \odot x := x^\lambda$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}_+, \diamond, \odot)$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet.

Lösung: Offenbar gilt $x \diamond y \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda \odot x \in \mathbb{R}_+$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Ferner ist $\diamond$ offensichtlich assoziativ und kommutativ und $1 \in \mathbb{R}_+$ ist neutrales Element von $\diamond$. Das Inverse bezüglich $\diamond$ für $x \in \mathbb{R}_+$ ist $1/x \in \mathbb{R}^+$. Also ist $(\mathbb{R}_+, \diamond)$ eine abelsche Gruppe.
Ferner gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (x^\mu) = (x^\mu)^\lambda = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \odot x \\
&(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = x^\lambda \diamond x^\mu = (\lambda \odot x) \diamond (\mu \odot x) \\
&\lambda \odot (x \diamond y) = \lambda \odot (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = x^\lambda \diamond y^\lambda = (\lambda \odot x) \diamond (\mu \odot y) \\
&1 \odot x = x^1 = x
\end{aligned}$$

Also ist $(\mathbb{R}_+, \diamond, \odot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte)**.** Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei den folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ handelt (begründen Sie Ihre Antworten).

(i) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + y = z \right\}$

(iii) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : xy = 2z \right\}$

Lösung:
(i) U_1 ist kein Unterraum, denn z. B. ist $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1$ (für $x = 1$), jedoch $-u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin U_1$ (denn $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$).

(ii) U_2 ist ein Unterraum, denn es gilt $0 \in U_2$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle

$$u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in U_2 \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in U_2$$

gilt

$$\begin{aligned} &3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 3x_1 + y_1 + 3x_2 + y_2 = z_1 + z_2, \\ &3\lambda x_1 + \lambda y_1 = \lambda(3x_1 + y_1) = \lambda z_1. \end{aligned}$$

Also sind $u_1 + u_2 \in U_2$ und $\lambda u_1 \in U_2$.
(iii) U_3 ist kein Unterraum, denn z. B. gilt

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_3, \quad \text{aber} \quad 2u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U_3.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V.
Zeigen Sie: $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V genau dann, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Lösung: Ist $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$, so ist $U_1 \cup U_2 = U_2$ oder $U_1 \cup U_2 = U_1$, also ist $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum.
Sei nun umgekehrt $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum und sei $U_1 \not\subseteq U_2$. Dann existiert also ein $v \in U_1$ mit $v \notin U_2$.
Es sei $u \in U_2$ beliebig. Dann gilt $u, v \in U_1 \cup U_2$ und da $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum ist, muss auch $u + v \in U_1 \cup U_2$ gelten.
Wäre $u + v \in U_2$, so wäre wegen $u \in U_2$ und der Unterraumeigenschaft von U_2 auch $v = u + v - u \in U_2$, was aber nicht der Fall ist.
Also muss $u + v \in U_1$ gelten. Wegen $v \in U_1$ und der Unterraumeigenschaft von U_1 folgt daher $u = u + v - v \in U_1$. Also gilt $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 4 (2+1 Punkte)**.** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, seien $U, W \subseteq V$ Unterräume von V und seien $a, b \in V$. Zeigen Sie:
1) Ist $b \in a + U$, so ist $a + U = b + U$.
2) Aus $a + U = b + W$ folgt $U = W$.

Lösung:
1) Aus $b \in a + U$ folgt $b = a + v$ für ein gewisses $v \in U$. Sei nun $u \in U$ beliebig. Dann gilt einerseits $b + u = a + v + u \in a + U$, denn mit u und v ist auch $v + u \in U$, weil U ein Unterraum ist. Das zeigt $b + U \subseteq a + U$.
Andererseits ist auch $a + u = b + u - v \in b + U$, denn mit u und v ist auch $u - v \in U$. Das zeigt auch $a + U \subseteq b + U$.
2) Es ist $b \in b + W = a + U$ und daraus folgt mit 1) $b + U = a + U = b + W$. Ist nun $u \in U$, so folgt also $b + u \in b + W$ und daraus folgt $u \in W$. Also ist $U \subseteq W$ und analog sieht man $W \subseteq U$.