Lösungen Übung 4

Aufgabe 1 (1 Punkt pro Teilaufgabe)**.** Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Form $a + ib$ mit reellem a und b dar (Rechenweg mit angeben).

$$(a) \quad (3+4i)(2+5i) \qquad\qquad (b) \quad \frac{1}{2-3i} \qquad\qquad (c) \quad \frac{1-3i}{2+i}$$

Lösung:
(a) Es ist $(3+4i)(2+5i) = 6 + 8i + 15i + 20i^2 = -14 + 23i$.
(b) Es gilt

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4-9i^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

(c) Es gilt

$$\frac{1-3i}{2+i} = \frac{(1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-6i-i+3i^2}{4-i^2} = \frac{-1-7i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

Aufgabe 2 (1+2 Punkte)**.** Seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie:

(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(ii) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Lösung: Wir schreiben $z = a + ib$ und $w = c + id$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
(i) Es gilt

$$\overline{z+w} = a + c - i(b+d) = a - ib + c - id = \overline{z} + \overline{w}.$$

(ii) Zunächst ist

$$zw = (a+ib)(c+id) = ac + ibc + iad + i^2bd = ac - bd + i(bc + ad).$$

Damit folgt

$$\overline{zw} = ac - bd - (bc+ad)i = ac - ibc - iad + i^2bd = (a-ib)(c-id) = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** In Übung 2 hatten Sie bereits mittels vollständiger Induktion gezeigt, dass $n^3 + 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.
Beweisen Sie diese Aussage nun erneut, aber diesmal ohne vollständige Induktion.

Lösung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es existieren $k \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, 1, 2\}$ mit $n = 3k + r$.
Ist $r = 0$, also n teilbar durch 3, so ist natürlich auch $n(n^2 + 2) = n^3 + 2n$ teilbar durch 3.
Ist dagegen $r \in \{1, 2\}$, so gilt $r^2 + 2 \in \{3, 6\}$ und daher

$$[n^2 + 2]_3 = [n]_3^2 + [2]_3 = [r]_3^2 + [2]_3 = [r^2 + 2]_3 = [0]_3.$$

D. h. $n^2 + 2$ und somit auch $n(n^2 + 2) = n^3 + 2n$ ist teilbar durch 3.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Eine Primzahl p heißt *Sophie-Germain-Primzahl*, fall auch $2p + 1$ wieder eine Primzahl ist.
Zeigen Sie: Ist $p > 3$ eine Sophie-Germain-Primzahl, so gilt $p \equiv 5 \mod 6$.

Lösung: Sei $p > 3$ eine Sophie-Germain-Primzahl. Es existieren ein $r \in \{0, \dots, 5\}$ und ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $p = 6k + r$.
Wäre $r \in \{0, 2, 4\}$, so wäre p gerade und somit (wegen $p \neq 2$) keine Primzahl.
Wäre $r = 3$, so wäre p durch 3 teilbar und somit (wegen $p \neq 3$) keine Primzahl.
Wäre $r = 1$, so wäre $2p + 1 = 12k + 3$ durch 3 teilbar und somit keine Primzahl (denn $2p + 1 \neq 3$).
Es bleibt also nur die Möglichkeit $r = 5$, d. h. es gilt $p \equiv 5 \mod 6$.