Walter Wenzel
Universität Leipzig
Aufbaukurs Geometrie

Leipzig, den 10.7.2020

Kommentare zum Kapitel 9 – Grundlagen der Flächentheorie

Während reguläre Kurven in $\mathbb{R}^3$ – genauer deren Spuren – eindimensionale Objekte sind, handelt es sich bei *regulären Flächen*, um die es in diesem letzten Kapitel unseres Kurses geht, um zweidimensionale Figuren.

Eine reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$ sieht – in topologischem Sinne – *lokal* so aus wie die Euklidische Ebene, kann aber im allgemeinen nicht – auch nicht bis auf einen Homöomorphismus – mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden.

Genauer ist eine reguläre Fläche – gemäß Definition 9.3 – eine Vereinigung von *regulär parametrisierten Flächenstücken*. Dabei ist ein regulär parametrisiertes Flächenstück ein Paar (S, f) mit einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und einem Homöomorphismus $f : U \to S$, der auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$ definiert ist – und außerdem stetig differenzierbar ist, wobei obendrein die zugehörige Jacobi-Matrix $J_f(a)$ für alle $a \in U$ den – maximal möglichen – Rang 2 hat.

Es folgt, dass regulär parametrisierte Flächenstücke – als homöomorphes Bild einer offenen Menge – nie kompakt sind.

Eine Sphäre ist eines der wichtigsten Beispiele einer regulären Fläche. Weil sie kompakt ist, werden also mindestens zwei regulär parametrisierte Flächenstücke benötigt, um sie zu überdecken.
Nach Beispiel 9.2 FF reichen wirklich zwei solche Flächenstücke, die jeweils durch Kugelkoordinaten parametrisiert sind.

Wir entwickeln die Flächentheorie nur so weit, dass die Aussage des *“Theorema Egregium”* von Gauß *verstanden* werden kann, das insbesondere besagt:

Es gibt keine längentreue Abbildung von der Kugeloberfläche – oder auch nur einer relativ offenen Teilmenge von ihr – in die Euklidische Ebene.

Mit den bereit gestellten Entwicklungen sind wir aber noch weit von einem Beweis entfernt.

Es werden *Krümmungen* auf regulären Flächen F studiert, die – definitionsgemäß – Krümmungen von Kurven sind, die in F verlaufen. Im Gegensatz zu Kapitel 8 lassen wir nun aber Krümmungen mit positiven und negativen Werten zu, was insbesondere in den Sattelpunkten einer Fläche Sinn macht.
Auch sind hier nicht alle Kurven interessant, die in F verlaufen. Beispielsweise haben diejenigen Breitenkreise auf der Erdoberfläche, die nicht mit dem Äquator übereinstimmen, einen zu kleinen Radius und folglich eine zu große Krümmung, um die Geometrie auf der Sphäre geeignet zu beschreiben. Wir brauchen uns nur für solche Kurven zu interessieren, die im Schnitt von F mit irgendeiner affinen Ebene enthalten sind, in der auch die jeweiligen Normalenvektoren der Fläche Richtungsvektoren sind. – Im Falle einer Sphäre sind diese affinen Ebenen gerade diejenigen, die auch das Zentrum der Sphäre enthalten.

Unter den auf diese Weise spezifizierten Kurven auf der Fläche, die durch einen fixierten Punkt p_0 gehen, gibt es eine mit möglichst kleiner Krümmung κ_1 und eine mit möglichst großer Krümmung κ_2.

Dann heißt

$$K := \kappa_1 \cdot \kappa_2 \text{ die } \textit{Gaußsche Krümmung} \text{ von } F \text{ in } p_0$$

und

$$H := \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2) \text{ die } \textit{mittlere Krümmung} \text{ von } F \text{ in } p_0.$$

Eine Sphäre mit Radius r_0 hat überall die Gaußsche Krümmung $K = \frac{1}{r_0^2}$ und die mittlere Krümmung $H = \frac{1}{r_0}$.
Ein Zylinder und ein Kegel haben überall die Gaußsche Krümmung 0, was darauf beruht, dass geradlinige Mantellinien auf diesen Flächen enthalten sind.
Die Gaußsche Krümmung und die mittlere Krümmung der gewöhnlichen Euklidischen Ebene haben natürlich überall den Wert 0.

Wir haben bereits in Paragraph 3 gesehen, dass orthogonale Abbildungen in $\mathbb{R}^n$ – definitionsgemäß – das Standard-Skalarprodukt invariant lassen und somit auch längentreu sind.
Analog werden nun *Isometrien* $\Psi : U \to S$ – von einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$ auf eine Teilmenge S einer regulären Fläche F in $\mathbb{R}^3$ betrachtet; dabei ist (S, Ψ) ein regulär parametrisiertes Flächenstück, und zwischen den Standard-Skalarprodukten in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ besteht folgende Beziehung:

$$\langle v, w \rangle \; = \; \langle J_\Psi(a) \cdot v, J_\Psi(a) \cdot w \rangle \text{ für alle } a \in U \text{ und alle } v, w \in \mathbb{R}^2.$$

Das bedeutet nun: Das Skalarprodukt zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^2$ bleibt invariant nach Multiplikation mit den zu Ψ gehörigen Jacobi-Matrizen.
Ist diese Invarianz gegeben, aber Ψ nicht unbedingt ein Homöomorphismus, so spricht man von einer *lokalen Isometrie* – oder einer *längentreuen Abbildung*, wenn zu jedem $a \in U$ eine Umgebung Ω existiert, auf der Ψ eine Bijektion – auf das Bild $\Psi(\Omega)$ – induziert.

Das Theorema Egregium von Gauß besagt nun etwas genauer, dass die Gaußsche Krümmung invariant unter lokalen Isometrien ist.

Mit den bisherigen Ausführungen folgt somit, dass es keine längentreue Abbildung von der Kugeloberfläche in die Ebene und folglich auch keine maßstabskonforme Landkarte geben kann.

In der Kartographie wird häufig die am Ende der Lehrveranstaltung behandelte *Mercator-Projektion* verwendet, die eine Bijektion von der Erdoberfläche – ohne einen Längengrad zwischen Nordpol und Südpol – auf die Euklidische Ebene ist. Diese ist aus genannten Gründen nicht längentreu. Mittels Methoden der Funktionentheorie lässt sich aber recht elegant ohne komplizierte Rechnungen zeigen, dass sie winkeltreu ist.

Am Ende sei auch noch erwähnt, dass ein Zylinder und ein – einfacher – Kegel, die ja beide überall die Gaußsche Krümmung 0 haben, durch *Abtrennung einer Mantellinie* und nachfolgendem *Abwickeln* lokal längentreu in die Euklidische Ebene abgebildet werden können.