9 Grundlagen der Flächentheorie

Definition 9.1. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend, es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f : U \to S$ sei eine Abbildung. Dann heißt das Paar (S,f) ein regulär parametrisiertes Flächenstück in $\mathbb{R}^3$, falls gilt:*

(FS1) f ist ein Homöomorphismus, das heißt, f ist bijektiv und beide Abbildungen $f : U \to S$ und $f^{-1} : S \to U$ sind stetig.

(FS2) f ist sogar stetig differenzierbar, das heißt: Schreiben wir $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, so existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2$ und diese sind auf U stetig.
Ferner hat die Jacobi-Matrix

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

für alle $a \in U$ den Rang 2.

Beispiel 9.2i): Sei $r_0 > 0$, sei $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < r_0\}$ und

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ||(x, y, z)|| = r_0, z > 0\}$$

Ferner definiere den Homöomorphismus $f : U \to S$ durch

$$f(x, y) := \left(x, y, \sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}\right)^T$$

f erfüllt neben (FS1) auch (FS2), für alle $(x, y) \in U$ erhalten wir:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

Beispiel 9.2. ii), Kugelkoordinaten:
Mittels Kugelkoordinaten können wir- wie folgt- noch eine wesentlich größere Teilmenge der Sphäre $K(0, r_0) \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisieren:
Setze $U' := (-\pi, \pi) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und

$$S' := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ||(x, y, z)|| = r_0; x > 0 \text{ falls } y = 0\right\}$$

Definiere dann $g : U' \to S'$ durch

$$g(\Theta, \varphi) := r_0 \cdot (\cos\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)^T$$

„Identifiziert"man $K(0, r_0)$ mit der Erdoberfläche, so beschreibt Θ die geographische Länge und φ die geographische Breite.
Auch ist g ein Homöomorphismus und stetig differenzierbar, wir erhalten für alle $(\Theta, \varphi) \in U'$:

$$J_g(\Theta, \varphi) = r_0 \cdot \begin{pmatrix} -\sin\Theta \cdot \cos\varphi & -\cos\Theta \cdot \sin\varphi \\ \cos\Theta \cdot \cos\varphi & -\sin\Theta \cdot \sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$det \begin{pmatrix} -\sin\Theta \cdot \cos\varphi & -\cos\Theta \cdot \sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = -\sin\Theta \cdot \cos^2\varphi$$

und

$$det \begin{pmatrix} \cos\Theta \cdot \cos\varphi & -\sin\Theta \cdot \sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = \cos\Theta \cdot \cos^2\varphi$$

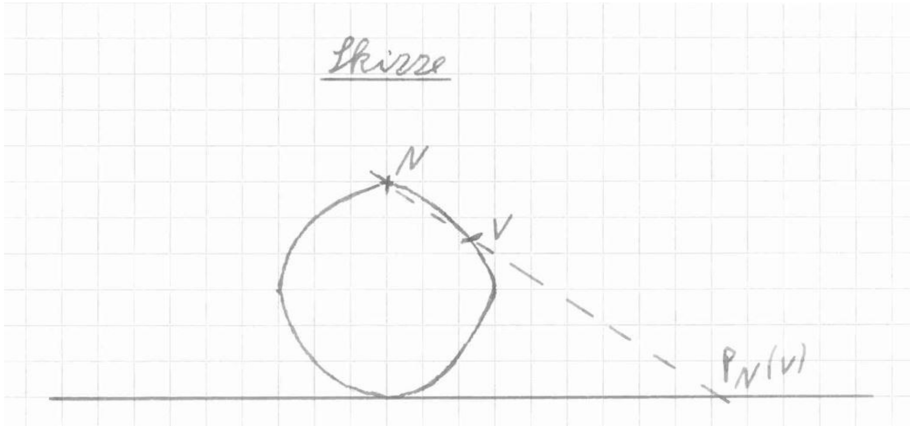
Mindestens eine dieser Determinanten verschwindet nicht, weil $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und damit $\cos\varphi \neq 0$ ist.

Beispiel 9.2iii), Die Stereographische Projektion Betrachte die Einheitssphäre $K(0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$, setze N:=(0,0,1) sowie $S_0 := K(0,1) \setminus \{N\}$. Die -bijektive- Abbildung $P_N : S_0 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$P_N(x_1, x_2, x_3) := \left(\frac{2x_1}{1 - x_3}, \frac{2x_2}{1 - x_3}\right) \tag{9.2}$$

heißt Stereographische Projektion.
Identifizieren wir $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $(u, v, -1) \in \mathbb{R}^3$, so liegen die 3 Punkte $N, (x_1, x_2, x_3)$ und $P_N(x_1, x_2, x_3)$ auf einer Geraden, genauer gilt:

$$\frac{1 - x_3}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{1-x_3} \\ \frac{2x_2}{1-x_3} \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1 + x_3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



P_N ist ein Homöomorphismus und die inverse Abbildung $P_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S_0$ ist stetig differenzierbar. Damit ist auch (S_0, P_N^{-1}) ein Flächenstück.
Die volle Sphäre $S(0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist kein Flächenstück, denn sie kann nicht homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ sein.

Definition 9.3. *Eine nichtleere Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt eine reguläre Fläche, wenn zu jedem $p \in F$ eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $p \in V$ sowie eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und ein Homöomorphismus $f : U \to V \cap F$ existieren, so dass $(V \cap F, f)$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück ist.*
Das bedeutet insbesondere: Eine reguläre Fläche F kann durch reguläre Flächenstücke überdeckt werden.

Beispiel 9.2 FF:
Nach obigen Beispielen ist die Sphäre $K(0, r_0)$ Vereinigung von zwei kongruenten regulär parametrisierten Flächenstücken und damit eine reguläre Fläche.

Konvention 9.4. Im folgenden nehmen wir an:
$F \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine reguläre Fläche und für jedes zugehörige Flächenstück $(V \cap F, f)$ ist der Homöomorphismus $f : U \to V \cap F$ sogar zweimal stetig differenzierbar.
Für $a_0 \in U$ schreiben wir auch kurz

$$J_f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_0) \right) \tag{9.1a}$$

Definition 9.5. *Unter den obigen Vereinbarungen heißt die Ebene $T_{f(a_0)}$ durch den Punkt $f(a_0)$ mit den beiden Richtungsvektoren $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_0)$ die Tangentialebene zu F durch $f(a_0)$.*

Der auf $T_{f(a_0)}$ senkrecht stehende Richtungsvektor

$$n_f(a_0) := \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \times \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_0) \right\|^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \times \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_0) \right) \tag{9.3}$$

heißt <u>*Normalenvektor*</u> *zu F in $f(a_0)$.*
Es gilt also:

$$T_{f(a_0)} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, n_f(a_0) \rangle = \langle f(a_0), n_f(a_0) \rangle\} \tag{9.4}$$

Beispiel 9.6. Es seien U', S' und $g : U' \to S'$ wie in Beispiel 9.2ii).
Dann folgt für $(\Theta, f) \in U' = (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{pmatrix} -\sin\Theta \cdot \cos\varphi \\ \cos\Theta \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\Theta \cdot \sin\varphi \\ -\sin\Theta \cdot \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta \cdot \cos^2\varphi \\ \sin\Theta \cdot \cos^2\varphi \\ \sin\varphi \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$$

also

$$n_g(\Theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\Theta \cdot \cos\varphi \\ \sin\Theta \cdot \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0} \cdot g(\Theta, \varphi)$$

$n_g(\Theta, \varphi)$ ist der <u>äußere Normalenvektor</u>.
Aufgrund der Beziehung $\langle g(\Theta, \varphi), n_g(\Theta, \varphi) \rangle = r_0$ erhalten wir für die zugehörige Tangentialebene die Gleichung

$$\langle v, n_g(\Theta, \varphi) \rangle = r_0 \tag{9.5}$$

Das ist auch die "gewöhnliche Tangentialebene“ zu der Sphäre $K(0, r_0)$ durch den Punkt $g(\Theta, \varphi)$- hier beschrieben durch die Hessesche Normalform.

Im folgenden sollen diverse Krümmungsbegriffe von Flächen studiert werden. Es liegt nahe, Krümmungen von Flächen auf Krümmungen von darauf verlaufenden Kurven zurückzuführen.
Auf der Erdoberfläche haben Breitenkreise, die nicht mit dem Äquator übereinstimmen, eine zu große Krümmung, um die Geometrie der Erdkugel angemessen zu beschreiben.
Durch die folgenden Konventionen 9.7 werden aber alle Längengrade sowie der Äquator berücksichtigt. Diese "Großkreise"weisen nämlich nur Normalvektoren auf, die gleichzeitig (nach eventuellem Vorzeichenwechsel) auch Normalvektoren der Erdoberfläche sind.

Konvention 9.7. i) Für einen festen Punkt $p_0 = f(a_0) \in F$ betrachten wir die Klasse φ_{F,p_0} aller -durch die Bogenlänge parametrisierten -Kurven $\gamma : [0, L] \to F$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Es gibt genau ein $s_0 \in [0, L]$ mit $\gamma(s_0) = p_0$.

(II) $t'(s_0) = \gamma''(s_0)$ ist ein skalares Vielfaches des Normalenvektors $n_f(a_0)$, es gibt also eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\kappa_{n,\gamma}(p_0)$ mit:

$$t'(s_0) = \kappa_{n,\gamma}(p_0) \cdot n_f(a_0) \tag{9.6}$$

ii) Gehört γ der Klasse φ_{F,p_0} an, so heißt die durch (9.6) festgelegte Zahl $\kappa_{n,\gamma}(p_0)$ die Normalkrümmung der Kurve γ im Stützpunkt $\gamma(s_0) = p_0 = f(a_0)$.

Bemerkung 9.8. i) Man erhält eine Kurve der Klasse φ_{F,p_0}, indem F mit irgendeiner affinen Ebene geschnitten wird, die p_0 als Punkt und $n_f(a_0)$ als einen Richtungsvektor enthält.

ii) Bis auf das Vorzeichen stimmt die Zahl $\kappa_{n,\gamma}(p_0)$ mit dem in §8 studierten Wert $\kappa(s_0)$ überein.
Wir erlauben nun jedoch auch negative Krümmungen:
Diese treten auf, wenn beide durch die Tangentialebene begrenzten offenen Halbräume die Menge $V \cap F$ in jeder Umgebung V von p_0 schneiden.
Anderenfalls weist $\kappa_{n,\gamma}(p_0)$ für jede Kurve der Klasse φ_{F,p_0} immer das gleiche Vorzeichen auf- wobei auch der Wert $\kappa_{n,\gamma}(p_0) = 0$ möglich ist.

iii) Aus Stetigkeitsgründen ist die Menge aller Normalkrümmungen von Kurven γ der Klasse φ_{F,p_0} im Stützpunkt p_0 der Fläche F kompakt.
Das Minimum $\kappa_1 = \kappa_1(F, p_0)$ und das Maximum $\kappa_2 = \kappa_2(F, p_0)$ all dieser Normalkrümmungen werden als die Hauptkrümmungen der Fläche F im Punkt p_0 bezeichnet.

Definition 9.9. *Unter obigen Konventionen ist die Gaußsche Krümmung von F im Punkt p_0 definiert durch*

$$\kappa := \kappa_1 \cdot \kappa_2 \tag{9.7}$$

Die mittlere Krümmung ist definiert durch

$$H := \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2) \tag{9.8}$$

Beispiel 9.10. i) Jede Kugel mit Radius r_0 hat in jedem Punkt die identischen Hauptkrümmungen

$$\kappa_1 = \frac{1}{r_0}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{r_0}$$

Damit erhalten wir:

$$\kappa = \frac{1}{r_0^2}, \quad H = \frac{1}{r_0}$$

ii) Ist S ein Zylinder mit Grundkreisradius r_0, so haben die -geraden- Mantellinien die konstante Krümmung $\kappa_1 = 0$, und die Kreise, deren innere Kreisscheiben die Zylinderachse senkrecht schneiden, haben die konstante Krümmung $\kappa_2 = \frac{1}{r_0}$. Damit erhalten wir -in jedem Flächenpunkt:

$$K = 0, \quad H = \frac{1}{2r_0}$$

Definition 9.11. *Es sei $S \subseteq F$ und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sei offen und zusammenhängend.*

i) Eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\psi : U \to S$ heißt eine <u>Isometrie</u>, falls (S, ψ) ein regulär parametrisiertes Flächenstück ist- und darüber hinaus für alle $a \in U$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\langle v, w \rangle = \langle J_\psi(a) \cdot v, J_\psi(a) \cdot w \rangle \tag{9.9}$$

ii) $\varphi : U \to S$ heißt <u>lokale Isometrie</u>, falls gilt:
Zu jedem $a \in U$ gibt es eine offene Menge Ω mit $a \in \Omega \subseteq U$, so dass die Restriktion $\varphi|_\Omega$ eine Isometrie zwischen Ω und $\varphi(\Omega)$ definiert.

Man beachte:
Links in (9.9) ist das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$, rechts aber in $\mathbb{R}^3$ zu bilden.

Beispiel 9.12. Es sei $h_0 > 0, U := (-\pi, \pi) \times (0, h_0)$ und

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x \neq -1, 0 < z < h_0\}$$

Definiere $\psi : U \to Z$ durch

$$\psi(\Theta, z) := (\cos\Theta, \sin\Theta, z)^T$$

(Z, ψ) ist ein regulär parametrisiertes Flächenstück; Z entsteht aus einem Zylinder durch Entfernen einer Mantellinie.

Für $(\Theta, z) \in U$ erhalten wir:

$$J_\psi(\Theta, z) = \begin{pmatrix} -\sin\Theta & 0 \\ \cos\Theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt für alle $v = (v_1, v_2)^T, w = (w_1, w_2)^T \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle J_\psi(\Theta, z) \cdot v, J_\psi(\Theta, z) \cdot w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\Theta \cdot v_1 \\ \cos\Theta \cdot v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\Theta \cdot w_1 \\ \cos\Theta \cdot w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \sin^2\Theta \cdot v_1 \cdot w_1 + \cos^2\Theta \cdot v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = \langle v, w \rangle$$

ψ ist also eine Isometrie.

Satz 9.13. Das "Theorema Eregium"von Gauß
Die Gaußsche Krümmung einer Fläche ist invariant unter lokalen Isometrien.

Bemerkung 9.14. Aus dem Theorema Eregium -und Beispiel 9.10i)- folgt:
Es gibt keine längentreue Abbildung von der Kugeloberfläche- oder auch nur einer relativ offenen Teilmenge der Kugeloberfläche- in die Ebene.
Es kann also auch keine maßstabskonforme Landkarte geben.

Beispiel 9.15. Der Mercator-Entwurf
Sei S' wie in Beispiel 9.2ii), also für fixiertes $r_0 > 0$:

$$S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ||(x, y, z)|| = r_0; x > 0, \text{ falls } y = 0\}$$

Definiere dann $\phi : S' \to (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ durch

$$\phi\left(r_0 \cdot (\cos\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\Theta \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)^T\right) := \left(\Theta, \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)\right)^T, \qquad (9.10)$$

wobei -wie im Beispiel 9.2ii)- gilt: $(\Theta, \varphi) \in (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
ϕ heißt Mercator-Projektion.
ϕ ist nicht längentreu, aber winkeltreu. Längengrade werden auf vertikale Geraden abgebildet, Kurven mit konstanter Himmelsrichtung auf Strecken mit entsprechendem Kurswinkel.