3 Orthogonale Abbildungen und Kongruenzabbildungen im $\mathbb{R}^n$

In diesem Paragraphen betrachten wir den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle , \rangle$.

Bemerkung 3.1. Für $1 \leq i, j \leq n$ setzen wir

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \tag{3.1}$$

Es gilt also insbesondere:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \text{ für } 1 \leq i, j \leq n \tag{3.2}$$

Definition 3.2. *i) Eine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt eine <u>orthogonale Abbildung</u>, wenn für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\langle \alpha(v), \alpha(w) \rangle = \langle v, w \rangle \tag{3.3}$$

ii) Eine $n \times n$-Matrix A über $\mathbb{R}$ heißt eine <u>orthogonale Matrix</u>, wenn die folgenden äquivalenten Beziehungen gelten:

$$A^T \cdot A = I_n \tag{3.4a}$$

$$A \cdot A^T = I_n, \tag{3.4b}$$

wobei I_n die n-reihige Einheitsmatrix bezeichne.

Lemma 3.3. Für eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) A ist eine orthogonale Matrix.

(ii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

(iii) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

Beweis. (ii) ist äquivalent zu (3.4a).
(iii) ist äquivalent zu (3.4b). □

Satz 3.4. Sei $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Abbildung. Dann gilt:

i) Ist $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, so ist auch $B' := \{\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_n)\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

ii) α ist ein -linearer- Isomorphismus, und die zu α gehörige Matrix A ist eine orthogonale Matrix.

Beweis. i) Für $1 \leq i, j \leq n$ folgt aus (3.3):

$$\langle \alpha(v_i), \alpha(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} .$$

Nach Aufgabe 8 ist nichts mehr zu zeigen.

ii) Wir wenden Aufgabe 7 an auf die Orthonormalbasis $\{\alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_n)\}$ und erhalten für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha(x), \alpha(e_j) \rangle \cdot \alpha(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \cdot \alpha(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \alpha(e_j)$$

Bezeichnet also A die Matrix $(\alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_n))$, so ist A nach Lemma 3.3(ii) und Satz 3.4i) eine orthogonale Matrix mit

$$\alpha(x) = A \cdot x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Nach Definition 3.2(ii) ist A invertierbar, also ist α ein Isomorphismus.

□

Umgekehrt gilt:

Satz 3.5. Ist A eine orthogonale $n \times n$-Matrix, so ist die Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $\alpha(v) := A \cdot v$ eine orthogonale Abbildung.

Beweis. Sind v,w Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^n$, so liefert (3.4a):

$$\langle \alpha(v), \alpha(w) \rangle = \langle A \cdot v, A \cdot w \rangle = (A \cdot v)^T \cdot (A \cdot w) = (v^T \cdot A^T) \cdot (A \cdot w) = v^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot w$$

$$= v^T \cdot I_n \cdot w = v^T \cdot w = \langle v, w \rangle$$

□

Definition 3.6. *i) Es sei $A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Eine Kongruenzabbildung von A_1 auf A_2 ist eine Bijektion $T : A_1 \to A_2$, so dass für alle $v, w \in A_1$ gilt:*

$$||T(v) - T(w)|| = ||v - w|| \tag{3.5}$$

Das bedeutet: Der Abstand zweier Punkte ist- in der Euklidischen Norm- invariant unter der Abbildung T. Gibt es eine Kongruenzabbildung von A_1 auf A_2, so heißen A_1 und A_2 kongruent

ii) Eine Kongruenzabbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird auch Kongruenzabbildung von $\mathbb{R}^n$ genannt.

Beispiel 3.7. i) Für $q \in \mathbb{R}^n$ heißt die Abbildung $\tau_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\tau_q(v) := v + q \tag{3.6}$$

die Verschiebung oder Translation um den Vektor q. τ_q ist eine Kongruenzabbildung, denn für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$||\tau_q(v) - \tau_q(w)|| = ||(v + q) - (w + q)|| = ||v - w||$$

ii) Sei U irgendein- homogener- Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Spiegelung s_U an U definiert durch:

$$s_U(u + w) = u - w \text{ für } u \in U, w \in U^\perp \tag{3.7}$$

s_U ist eine Kongruenzabbildung von $\mathbb{R}^n$: Für $u_1, u_2 \in U$ und $w_1, w_2 \in U^\perp$ gilt zunächst:

$$\langle u_1 - u_2, w_2 - w_1 \rangle = 0$$

Damit folgt aus Bemerkung 2.6:

$$\begin{aligned}
&||s_U(u_1 + w_1) - s_U(u_2 + w_2)||^2 \\
&= ||(u_1 - w_1) - (u_2 - w_2)||^2 \\
&= ||(u_1 - u_2) + (w_2 - w_1)||^2 \\
&= ||u_1 - u_2||^2 + ||w_2 - w_1||^2 \\
&= ||u_1 - u_2||^2 + ||w_1 - w_2||^2 \\
&= ||(u_1 - u_2) + (w_1 - w_2)||^2 \\
&= ||(u_1+w_1)-(u_2+w_2)||^2
\end{aligned}$$

□

Satz 3.8. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) T ist eine Kongruenzabbildung von $\mathbb{R}^n$.

(ii) Es gibt eine orthogonale Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ein $q \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$T(v) = \alpha(v) + q \tag{3.8a}$$

Mit anderen Worten gilt also:

$$T = \tau_q \circ \alpha \tag{3.8.b}$$

(iii) Es gibt eine orthogonale $n \times n$-Matrix A und ein $q \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$T(v) = A \cdot v + q \tag{3.9}$$

Beweis. $(ii) \Rightarrow (iii)$ gilt nach Satz 3.4ii).
$(iii) \Rightarrow (ii)$ gilt nach Satz 3.5.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Es genügt zu zeigen, dass die Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $\alpha(v) := T(v) - T(0)$ eine orthogonale Abbildung ist. Zunächst gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$||\alpha(v)|| = ||T(v) - T(0)|| = ||v - 0|| = ||v||,$$

$$||\alpha(v) - \alpha(w)|| = ||T(v) - T(w)|| = ||v - w||$$

Das heißt: α behält sowohl Normen als auch Distanzen bei. Satz 2.4 liefert damit für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \alpha(v), \alpha(w) \rangle = -\langle \alpha(v), -\alpha(w) \rangle$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot (||\alpha(v) - \alpha(w)||^2 - ||\alpha(v)||^2 - ||\alpha(w)||^2)$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot (||v - w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2)$$
$$= -\langle v, -w \rangle = \langle v, w \rangle$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ folgt aus (3.9) und (3.4a):

$$||T(v) - T(w)||^2 = \langle T(v) - T(w), T(v) - T(w) \rangle$$

$$= \langle A \cdot (v - w), A \cdot (v - w) \rangle = (A \cdot (v - w))^T \cdot A \cdot (v - w)$$

$$= (v - w)^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot (v - w) = (v - w)^T \cdot I_n \cdot (v - w)$$

$$= (v - w)^T \cdot (v - w)$$

$$= ||v - w||^2$$

wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 3.9. Die Menge der Kongruenzabbildungen von $\mathbb{R}^n$ bildet mit der üblichen Komposition von Abbildungen eine Gruppe, die wir mit $\mathbb{E}(n)$ bezeichnen und auch Euklidische Gruppe genannt wird. Nach Satz 3.8 bilden die orthogonalen Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Untergruppe von $\mathbb{E}(n)$, die isomorph zu der Gruppe O(n) der orthogonalen Matrizen vom Rang n ist. O(n) wird auch orthogonale Gruppe genannt.

Definition 3.10. *Eine Teilmenge W von $\mathbb{R}^n$ heißt ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$, falls entweder $W = \emptyset$ ist oder ein $w \in \mathbb{R}^n$ sowie ein homogener Unterraum W_0 von $\mathbb{R}^n$ existiert mit*

$$W = w + W_0 := \{w + u | u \in W_0\} = \tau_w(W_0) \tag{3.10}$$

W_0 heißt dann auch der zu W gehörige homogene Unterraum.

Bemerkung 3.11. Ist W ein nichtleerer affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit W_0 als zugehörigem homogenen Unterraum, so ist W_0 eindeutig durch W bestimmt.
Es gilt genauer:

$$W_0 = \{w_1 - w_2 | w_1, w_2 \in W\} \tag{3.11}$$

Definition 3.12. *Wir setzen*

$$dim\emptyset := -1 \tag{3.12a}$$

Ist $W = w + W_0$ ein nichtleerer affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit zugehörigem homogenen Unterraum W_0, so setzen wir

$$dimW := dimW_0 \tag{3.12b}$$

Bemerkung 3.13 (Übersicht über diverse affine Unterräume in $\mathbb{R}^n$)**.**

Dimension	Bezeichnung
0	einelementige Punktmenge
1	affine Gerade
2	affine Ebene
n-2	affine Hypergerade
n-1	affine Hyperebene

Bemerkung 3.14. Für eine Teilmenge W von $\mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) W ist affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

(ii) W ist die Lösungsmenge irgendeines linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$.

Definition 3.15. *Zwei affine Unterräume W_1, W_2 von $\mathbb{R}^n$ sind zueinander parallel, falls die folgenden -offensichtlich äquivalenten- Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) W_1 und W_2 besitzen denselben zugehörigen homogenen Unterraum.

(ii) Es gibt eine Verschiebung $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\tau(W_1) = W_2$$

Bemerkung 3.16. Zwei zueinander parallele affine Unterräume von $\mathbb{R}^n$ sind gleich oder disjunkt:
Sonst gäbe es ein $w_0 \in \mathbb{R}^n$ und zwei verschiedene homogene Unterräume W_0, W_0' von $\mathbb{R}^n$ mit

$$w_0 + W_0 = w_0 + W_0',$$

was nicht möglich ist.

Definition 3.17. *Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kongruenzabbildung von $\mathbb{R}^n$. Für jedes $q \in \mathbb{R}^n$ heißt dann die Kongruenzabbildung*

$$T' := \tau_q \circ T \circ \tau_{-q} \tag{3.13}$$

eine zu T konjugierte Kongruenzabbildung.

Bemerkung 3.18. Für fixiertes $q \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\overline{v} := v + q \text{ für jedes } v \in \mathbb{R}^n \tag{3.14}$$

Wir erhalten dann für alle $v \in \mathbb{R}^n$ -mit (3.13):

$$T'(\overline{v}) = (\tau_q \circ T)(\overline{v} - q) = (\tau_q \circ T)(v) = \overline{T(v)},$$

also zusammenfassend:

$$T'(\overline{v}) = \overline{T(v)} \tag{3.15}$$

Das bedeutet:
Geht das ursprüngliche Koordinatensystem durch Verschiebung über in ein neues mit $q = \overline{0}$ als neuem Koordinatenursprung, so hat T' in diesem neuen Koordinatensystem die gleiche Wirkung wie T im alten Koordinatensystem.

Definition 3.19. *Es sei H eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ mit zugehöriger homogener Hyperebene H_0. Dann wird -mit den Bezeichnungen in den Standard- Beispielen 3.7- die* *<u>Spiegelung</u>* *$s_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an H definiert durch*

$$s_H := \tau_q \circ s_{H_0} \circ \tau_{-q} \tag{3.16}$$

wobei $q \in H$ beliebig ist; die Spiegelung s_H ist also zu s_{H_0} konjugiert.

Bemerkung 3.20. i) Die Abbildung s_H in (3.16) ist wohldefiniert -das heißt, unabhängig von der speziellen Wahl des Punktes $q \in H$:
Sind nämlich $q_1, q_2 \in H$, so folgt zunächst $q_1 - q_2 \in H_0$. Zu vorgegebenem $v \in \mathbb{R}^n$ existieren weiter Vektoren $u \in H_0$ und $w \in H_0^\perp$ mit

$$v - q_1 = u + w.$$

Dann ist

$$v - q_2 = (u + q_1 - q_2) + w \text{ sowie } u + q_1 - q_2 \in H_0.$$

Damit folgt:

$$(\tau_{q_1} \circ s_{H_0} \circ \tau_{-q_1})(v) = (\tau_{q_1} \circ s_{H_0})(v - q_1) = (\tau_{q_1} \circ s_{H_0})(u + w) = \tau_{q_1}(u - w) = u + q_1 - w,$$

$$(\tau_{q_2} \circ s_{H_0} \circ \tau_{-q_2})(v) = (\tau_{q_2} \circ s_{H_0})(v - q_2) = (\tau_{q_2} \circ s_{H_0})((u + q_1 - q_2) + w)$$
$$= \tau_{q_2}((u + q_1 - q_2) - w) = u + q_1 - w$$

wie gewünscht.

ii) Ist $q \in H$ fixiert, so liefert Bemerkung 3.18 für alle $v \in \mathbb{R}^n$:

$$s_H(\overline{v}) = \overline{s_{H_0}(v)}.$$

Wegen der Äquivalenz

$$v \in H_0 \Leftrightarrow \overline{v} \in H$$

folgt:
Unter der Spiegelung s_H sind alle Punkte in H Fixpunkte.
Ferner vertauscht s_H die beiden durch H bestimmten Halbräume.

Satz 3.21. Sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt:

$$detA = 1 \text{ oder } detA = -1.$$

Beweis. (3.4a) liefert

$$1 = detI_n = det(A^T \cdot A) = det(A^T) \cdot detA = (detA)^2$$

wie gewünscht. □

Definition 3.22. *Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kongruenzabbildung von $\mathbb{R}^n$, und A sei die -eindeutig bestimmte- orthogonale $n \times n$ Matrix, so dass gemäß Satz 3.8 gilt:*

$$T(v) = A \cdot v + T(0) \textit{ für alle } v \in \mathbb{R}^n \tag{3.9a}$$

Dann heißt T eine gleichsinnige Kongruenzabbildung, falls det A=1 ist.

Bemerkung 3.23. Gleichsinnige Kongruenzabbildungen werden auch Bewegungen genannt, weil sie sich physikalisch (für $n \leq 3$) durch einen Bewegungsprozess realisieren lassen.
Man beachte aber:
In der Literatur wird häufig auch jede Kongruenzabbildung als Bewegung bezeichnet.

Beispiel 3.24. i) Jede Verschiebung ist eine gleichsinnige Kongruenzabbildung.

ii) Sei U ein homogener Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $k := dimU, m := dimU^\perp$. Dann besitzt $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ mit $v_1, \ldots, v_k \in U, v_{k+1}, \ldots, v_n \in U^\perp$, bezüglich der die Spiegelung s_U an U durch folgende orthogonale Matrix beschrieben wird:

$$A = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Dabei ist $detA = (-1)^m$. Die Spiegelung s_U ist also genau dann gleichsinnig, wenn m=n-k gerade ist. Insbesondere gilt:
Punktspiegelungen in der Ebene sind stets gleichsinnig. Spiegelungen an einer Hyperebene sind niemals gleichsinnig.

Bemerkung 3.25. Sei $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Kongruenzabbildung und a:=T(0). Dann gilt entweder

$$T(x) = x + a \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{3.18a}$$

oder

$$T(x) = -x + a \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{3.18b}$$

Das folgt direkt aus Definition 3.6 -oder Satz 3.8 $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Im Falle (3.18a) ist T die Verschiebung um a -und gleichsinnig.
Im Falle (3.18b) ist T die Spiegelung am Punkt $\frac{1}{2}a$ - und nicht gleichsinnig.

Definition 3.26. *Es sei $\Theta \in [0, 2\pi)$. Dann heißt die orthogonale Matrix*

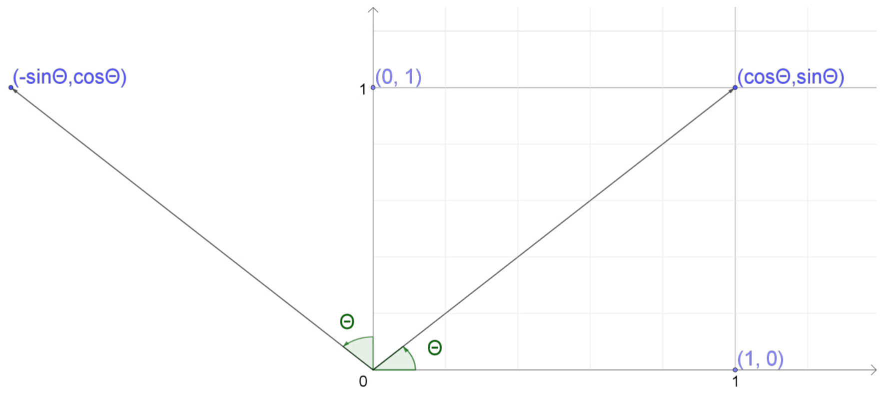
$$A = A(\Theta) := \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

die zum Winkel Θ (im Bogenmaß) gehörige Drehmatrix. Die induzierte orthogonale Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\alpha(x) := A \cdot x$$

heißt die Drehung um den Nullpunkt um den Winkel Θ- im mathematisch positiven Sinn.

Skizze:



Satz 3.27. Sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine orthogonale Abbildung. Dann gibt es ein $\Theta \in [0, 2\pi)$, so dass die zu α gehörige orthogonale Matrix A entweder gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{3.20a}$$

oder

$$A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix} \tag{3.20b}$$

Gilt (3.20a), so ist α die Drehung um den Nullpunkt um den Winkel Θ. Ferner ist α gleichsinnig.
Gilt (3.20b), so ist α die Spiegelung an der -homogenen- Geraden

$$g := \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2} \cdot \Theta) \\ \sin(\frac{1}{2} \cdot \Theta) \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.20c}$$

Beweis. Für A machen wir den Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Weil sowohl die Zeilen als auch die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bilden, folgt:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

$$a \cdot b + c \cdot d = a \cdot c + b \cdot d = 0.$$

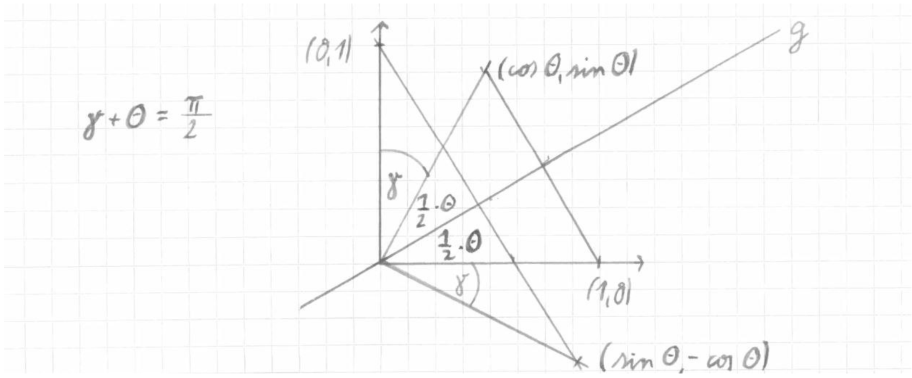
Es gibt also ein $\Theta \in [0, 2\pi)$ mit:

$$a = \cos\Theta, b = \sin\Theta$$

Weiter folgt:

$$|c| = |b|, |d| = |a|, c \cdot d = -a \cdot b$$

Damit gilt entweder (3.20a) oder (3.20b).
Im 1.Fall ist α -nach Definition 3.26- die Drehung um den Nullpunkt um den Winkel Θ, und es ist det A=1. Im 2.Fall ist α die Spiegelung an g wie in (3.20c):
Skizze:



Beachte hierzu:

$$\begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix} = s_g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ -\cos\Theta \end{pmatrix} = s_g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem sind die orthogonalen -und damit auch linearen- Abbildungen α und s_g durch die Bilder der Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eindeutig bestimmt. $\square$

Satz 3.28. Es sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Nullpunkt um den Winkel Θ. Dann ist α darstellbar als Komposition zweier Spiegelungen an homogenen Geraden.
Genauer gilt:
Ist s_h die Spiegelung an der x-Achse $h := \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ und g wie in (3.20c), so folgt:

$$\alpha = s_g \circ s_h \tag{3.21}$$

Beweis. Nach Satz 3.27 wird s_g beschrieben durch die Matrix $\begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix}$ und s_h wird beschrieben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Gemäß der Definition 3.26 folgt die Behauptung nun aus der Beziehung

$$\begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Definition 3.29. *Es sei $\Theta \in [0, 2\pi)$ und $q \in \mathbb{R}^2$. Ferner sei $\alpha = \alpha_\Theta$ die Drehung um den Nullpunkt um den Winkel Θ -im mathematisch positiven Sinn. Dann heißt*

$$\alpha' := \tau_q \circ \alpha \circ \tau_{-q} \tag{3.22}$$

die Drehung um q um den Winkel Θ -im mathematisch positiven Sinn.

Siehe hierzu auch Definition 3.17, Bemerkung 3.18 und Definition 3.19, die Abbildung α' ist also zu α konjugiert und hat q als Fixpunkt.
Ferner beobachten wir

Bemerkung 3.30. Mit den Bezeichnungen in (3.22) gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\alpha'(x) = \alpha(x - q) + q \tag{3.22a}$$

$$\alpha'(x + q) = \alpha(x) + q \tag{3.22b}$$

Weiter folgt

Satz 3.31. Jede Drehung $\alpha' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um einen Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ ist darstellbar als Komposition zweier Spiegelungen -an geeigneten affinen Geraden.

Beweis. Setze $\alpha := \tau_{-q} \circ \alpha' \circ \tau_q$. Dann ist $\alpha' = \tau_q \circ \alpha \circ \tau_{-q}, \alpha$ ist also eine Drehung um den Nullpunkt. Nach Satz 3.28 gibt es also homogene Geraden g,h in $\mathbb{R}^2$ mit

$$\alpha = s_g \circ s_h$$

Für die affinen Geraden $g' := q + g, h' := q + h$ folgt dann gemäß Definition 3.19:

$$s_{g'} = \tau_q \circ s_g \circ \tau_{-q}, s_{h'} = \tau_q \circ s_h \circ \tau_{-q}$$

Damit folgt auch

$$\alpha' = \tau_q \circ s_g \circ s_h \circ \tau_{-q} = (\tau_q \circ s_g \circ \tau_{-q}) \circ (\tau_q \circ s_h \circ \tau_{-q}) = s_{g'} \circ s_{h'}$$

wie gewünscht. $\square$

Nun können wir zeigen:

Satz 3.32. Jede Kongruenzabbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist darstellbar als Komposition von maximal drei Spiegelungen -an geeigneten affinen Geraden.
Ist T eine gleichsinnige Kongruenzabbildung, so reichen sogar zwei Geraden-Spiegelungen.

Beweis. Wir schreiben

$$T(x) = \alpha(x) + q \text{ für } x \in \mathbb{R}^2,$$

wobei α die zu T gehörige orthogonale Abbildung ist.
Wir unterscheiden drei Fälle.

1.Fall: $\alpha = id_{\mathbb{R}^2}$.
In diesem Fall ist T die Verschiebung τ_q, die nach Aufgabe 15 die Komposition zweier Geraden-Spiegelungen ist.

2.Fall: T und damit auch α sind gleichsinnige Kongruenzabbildungen, aber es ist $\alpha \neq id_{\mathbb{R}^2}$. In diesem Fall ist α nach Satz 3.27 eine Drehung um den Nullpunkt um einen Winkel $\Theta \in (0, 2\pi)$. Nach Aufgabe 17 ist dann auch T eine Drehung um einen Punkt x_F um den gleichen Winkel Θ. Nach Satz 3.31 ist diese Drehung T darstellbar als die Komposition von zwei Geraden-Spiegelungen.

3.Fall: T und damit auch α sind keine gleichsinnigen Kongruenzabbildungen. In diesem Fall ist α nach Satz 3.27 selbst eine Geraden-Spiegelung. Weil τ_q-nach Fall 1- Komposition von zwei Geraden-Spiegelungen ist, folgt, dass $T = \tau_q \circ \alpha$ Komposition von drei Geraden-Spiegelungen ist.

$\square$

Satz 3.33. Es sei $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Abbildung. Dann gilt:

i) Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von α, so gilt:

$$\lambda_0 = 1 \text{ oder } \lambda_0 = -1$$

ii) Ist n ungerade, so ist mindestens eine der beiden Zahlen 1 und -1 Eigenwert von α.

Beweis. i) Sei v_0 ein -von 0 verschiedener- Eigenvektor zum Eigenwert λ_0, das heißt: $\alpha(v_0) = \lambda_0 \cdot v_0$.
Dann folgt:

$$0 < \langle v_0, v_0 \rangle = \langle \alpha(v_0), \alpha(v_0) \rangle = \langle \lambda_0 \cdot v_0, \lambda_0 \cdot v_0 \rangle = \lambda_0^2 \cdot \langle v_0, v_0 \rangle.$$

Das bedeutet: $\lambda_0^2 = 1$, also $\lambda_0 = 1$ oder $\lambda_0 = -1$

ii) Weil n ungerade ist, besitzt das zu α gehörige charakteristische Polynom mindestens eine reelle Nullstelle, diese ist Eigenwert von α. Damit folgt ii) aus i).

□

Definition 3.34. *Es sei* $\Theta \in [0, 2\pi)$

i) Sei L_0 *eine homogene Gerade in* $\mathbb{R}^3$.
Eine lineare Abbildung $\alpha_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *heißt Drehung um* L_0 *um den Winkel* Θ, *wenn die homogene Ebene* $L_0^\perp$ *eine -geordnete- Orthonormalbasis* (v_1, v_2) *besitzt, so dass gilt:*

$$\alpha_0(v) = v \text{ für } v \in L_0 \tag{3.23a}$$

$$\alpha_0(v_1) = \cos\Theta \cdot v_1 + \sin\Theta \cdot v_2 \tag{3.23b}$$

$$\alpha_0(v_2) = -\sin\Theta \cdot v_1 + \cos\Theta \cdot v_2 \tag{3.23c}$$

Insbesondere gilt:
Die Restriktion $\alpha_0|_{L_0^\perp}$ *wird durch die Drehmatrix* $A(\Theta)$ *beschrieben;* a_0 *ist also eine orthogonale Abbildung.*

ii) Sei L *eine affine Gerade in* $\mathbb{R}^3$ *mit zugehöriger homogener Gerade* L_0. *Weiter sei* α_0 *wie in i). Dann heißt die Abbildung*

$$\alpha := \tau_q \circ \alpha_0 \circ \tau_{-q} \tag{3.24}$$

Drehung um L *um den Winkel* Θ, *wobei* $q \in L$ *beliebig ist.*

Bemerkung 3.35. i) α wie in (3.24) ist unabhängig von der speziellen Wahl des Punktes $q \in L$:
Ist nämlich auch $q' \in L$, so ist $v_0 := q' - q \in L_0$ und für alle $v \in \mathbb{R}^3$ folgt -wegen $\tau_{q'} = \tau_q \circ \tau_{v_0}$ und $\alpha_0(v_0) = v_0$:

$$(\tau_{q'} \circ \alpha_0 \circ \tau_{-q'})(v)$$

$$= (\tau_q \circ \tau_{v_0} \circ \alpha_0 \circ \tau_{-v_0} \circ \tau_{-q})(v)$$
$$= (\tau_{v_0} \circ \alpha_0 \circ \tau_{-v_0})(v - q) + q$$
$$= \alpha_0(v - q - v_0) + q + v_0$$
$$= \alpha_0(v - q) + q$$
$$= (\tau_q \circ \alpha_0 \circ \tau_{-q})(v)$$

ii) Aus (3.24) -und (i)- folgt für alle $q \in L$:

$$\alpha(q) = (\tau_q \circ \alpha_0 \circ \tau_{-q})(q) = \alpha_0(q - q) + q = q$$

Das bedeutet: Jeder Punkt von L ist Fixpunkt unter α.

Satz 3.36. Es sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung. Dann gibt es eine geordnete Orthonormalbasis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$, bezüglich der α durch eine der Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

oder -für geeignetes $\Theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$- durch eine der Matrizen

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

dargestellt wird.

Beweis. Ist α diagonalisierbar, dann kommen nach Satz 3.33i) nur 1 und -1 als zugehörige Eigenwerte in Betracht. Bei geeigneter Anordnung der zugrunde liegenden Orthonormalbasis besitzt α also eine der in (3.25) gegebenen Matrix-Darstellungen.
Wir nehmen nun also an: α ist nicht diagonalisierbar.
Nach Satz 3.33ii) ist aber mindestens eine der beiden Zahlen 1 und -1 Eigenwert von α. Es gibt also einen eindimensionalen Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit $\alpha(U) = U$. Nach Aufgabe 13i) gilt dann auch: $\alpha(U^\perp) = U^\perp$.

Die Restriktion $\alpha_0 := \alpha|_{U^\perp}$ lässt sich also durch eine orthogonale 2×2-Matrix A beschreiben, die nach Satz 3.27 Drehmatrix oder Spiegelungsmatrix ist. Wäre A eine Spiegelungsmatrix, so hätte A sowohl 1 als auch -1 als Eigenwert. Dann wäre also α_0 und damit auch α diagonalisierbar- im Widerspruch zur obigen Annahme.
Es verbleibt also nur der Fall: A ist eine Drehmatrix.
Das bedeutet: α ist darstellbar durch eine Matrix der Gestalt M_5 oder M_6, wobei zunächst auch $\Theta = 0$ oder $\Theta = \pi$ möglich ist.
Im Falle $\Theta = 0$ erhalten wir aber M_1 oder M_2.
Im Falle $\Theta = \pi$ erhalten wir M_4 oder, nach einer Permutation der Zeilen und Spalten, M_3. □

Satz 3.37. Es sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung. Dann ist α darstellbar als Komposition von maximal 3 Spiegelungen- an geeigneten homogenen Ebenen.
Genauer gilt mit den Bezeichnungen in Satz 3.36: M_2 ist selbst eine Spiegelungsmatrix; M_3 bzw. M_4 ist Produkt von zwei bzw. drei Spiegelungsmatrizen.
Ebenso ist M_5 bzw. M_6 Produkt von zwei bzw. drei Spiegelungsmatrizen.

Beweis. Nach Satz 3.36 genügt es, die Behauptungen bezüglich der Matrizen $M_2, \ldots, M_6$ zu verifizieren, für M_1 ist nichts zu zeigen.
Für M_2 ist die Behauptung klar nach Beispiel 3.24ii) -nach einer Permutation der Zeilen und Spalten. Dann folgt die Behauptung auch für M_3 und M_4.
Für $B(\Theta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix}$ folgt weiter:

$$M_5 = B(\Theta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dabei beschreibt $B(\Theta)$ die Spiegelung an der homogenen Ebene

$$E := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\frac{1}{2} \cdot \Theta) \\ \sin(\frac{1}{2} \cdot \Theta) \end{pmatrix}$$

siehe dazu auch Satz 3.27.
Folglich ist M_5 Produkt von zwei Spiegelungsmatrizen. Somit folgt schließlich, dass $M_6 = M_2 \cdot M_5$ Produkt von drei Spiegelungsmatrizen ist. □

Satz 3.38. Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kongruenzabbildung mit zugehöriger orthogonaler Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; es gilt also:

$$T(x) = \alpha(x) + T(0) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

Ferner habe T einen Fixpunkt x_F und es gebe k homogene Hyperebenen $H_1, \ldots, H_k$ in $\mathbb{R}^n$ mit:

$$\alpha = s_{H_1} \circ \ldots \circ s_{H_k}. \tag{3.27a}$$

Dann ist T ebenfalls darstellbar als Komposition von k Spiegelungen an geeigneten-affinen- Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$. Genauer folgt für $H_i' := x_F + H_i, 1 \leq i \leq k$:

$$T = s_{H_1'} \circ \ldots \circ s_{H_k'} \tag{3.27b}$$

Beweis. Nach Definition 3.19 ist klar:

$$s_{H_i'} = \tau_{x_F} \circ s_{H_i} \circ \tau_{-x_F} \text{ für } 1 \leq i \leq k$$

Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
&(s_{H_1'} \circ \ldots \circ s_{H_k'})(x) \\
&= (\tau_{x_F} \circ s_{H_1} \circ \tau_{-x_F}) \circ \ldots \circ (\tau_{x_F} \circ s_{H_k} \circ \tau_{-x_F})(x) \\
&= (\tau_{x_F} \circ (s_{H_1} \circ \ldots \circ s_{H_k}) \circ \tau_{-x_F})(x) \\
&= (\tau_{x_F} \circ \alpha \circ \tau_{-x_F})(x) \\
&= \alpha(x - x_F) + x_F \\
&= \alpha(x) - \alpha(x_F) + x_F \\
&= \alpha(x) - T(x_F) + T(0) + x_F \\
&= \alpha(x) + T(0) = T(x) \\
&\text{wegen } T(x_F) = x_F
\end{aligned}$$

Zusammenfassend folgt (3.27b). □

Nun können wir zeigen:

Satz 3.39. Jede Kongruenzabbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist darstellbar als Komposition von maximal 4 Spiegelungen -an geeigneten affinen Ebenen.

Beweis. Es sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die zu T gehörige orthogonale Abbildung.
Für $q := T(0)$ gilt also:

$$T(x) = \alpha(x) + q \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

Nach Aufgabe 15 ist τ_q die Komposition zweier Spiegelungen an geeigneten affinen Ebenen und α ist nach Satz 3.37 darstellbar als Komposition von maximal 3 Spiegelungen an geeigneten homogenen Ebenen. Nach Satz 3.37 können wir annehmen, dass α durch eine Matrix folgender Gestalt beschrieben wird:

$$\tilde{M_6} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \text{ mit } \Theta \in (0, 2\pi)$$

Im Falle $\Theta = \pi$ ist dabei $\tilde{M_6} = M_4$.
Es gibt also einen Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit

$$dim U = 1, \alpha(U) = U, \alpha(U^\perp) = U^\perp,$$

wobei zusätzlich $\alpha|_{U^\perp}$ eine Drehung mit Drehmatrix $A(\Theta)$ ist. Schreiben wir $q = (q_1, q_2, q_3)^T$, so folgt für alle $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ A(\Theta) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Aus Bemerkung 3.25, angewandt auf die erste Koordinate und Aufgabe 17, angewandt auf die beiden letzten Koordinaten, folgt:
T hat (genau) einen Fixpunkt.
Damit folgt die Behauptung aus Satz 3.38 für n=k=3, wonach mit α auch T darstellbar ist als Komposition von 3 Spiegelungen an geeigneten affinen Ebenen. □

Bemerkung 3.40. Allgemein kann für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden:

1. Jede orthogonale Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist darstellbar als Komposition von maximal n Spiegelungen- an geeigneten homogenen Hyperebenen.

2. Jede Kongruenzabbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist darstellbar als Komposition von maximal n+1 Spiegelungen- an geeigneten affinen Hyperebenen.

Bemerkung 3.41. physikalische Anwendung
Wird ein fester- dreidimensionaler- Körper so bewegt, dass mindestens ein Punkt fest

bleibt, so gibt es sogar eine komplette Achse mit lauter Fixpunkten.
Die Bewegung, die dann eine Drehung um diese Achse ist, kann nämlich- bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems- durch eine der Matrizen M_1, M_3, M_5 in Satz 3.36 beschrieben werden, diese haben alle den Eigenwert 1.