FIBONACCI-ZAHLEN UND DER GOLDENE SCHNITT

Fiona Grießhammer und Rebekka Maas

Seminarinhalte

1. FIBONACCIZAHLEN.

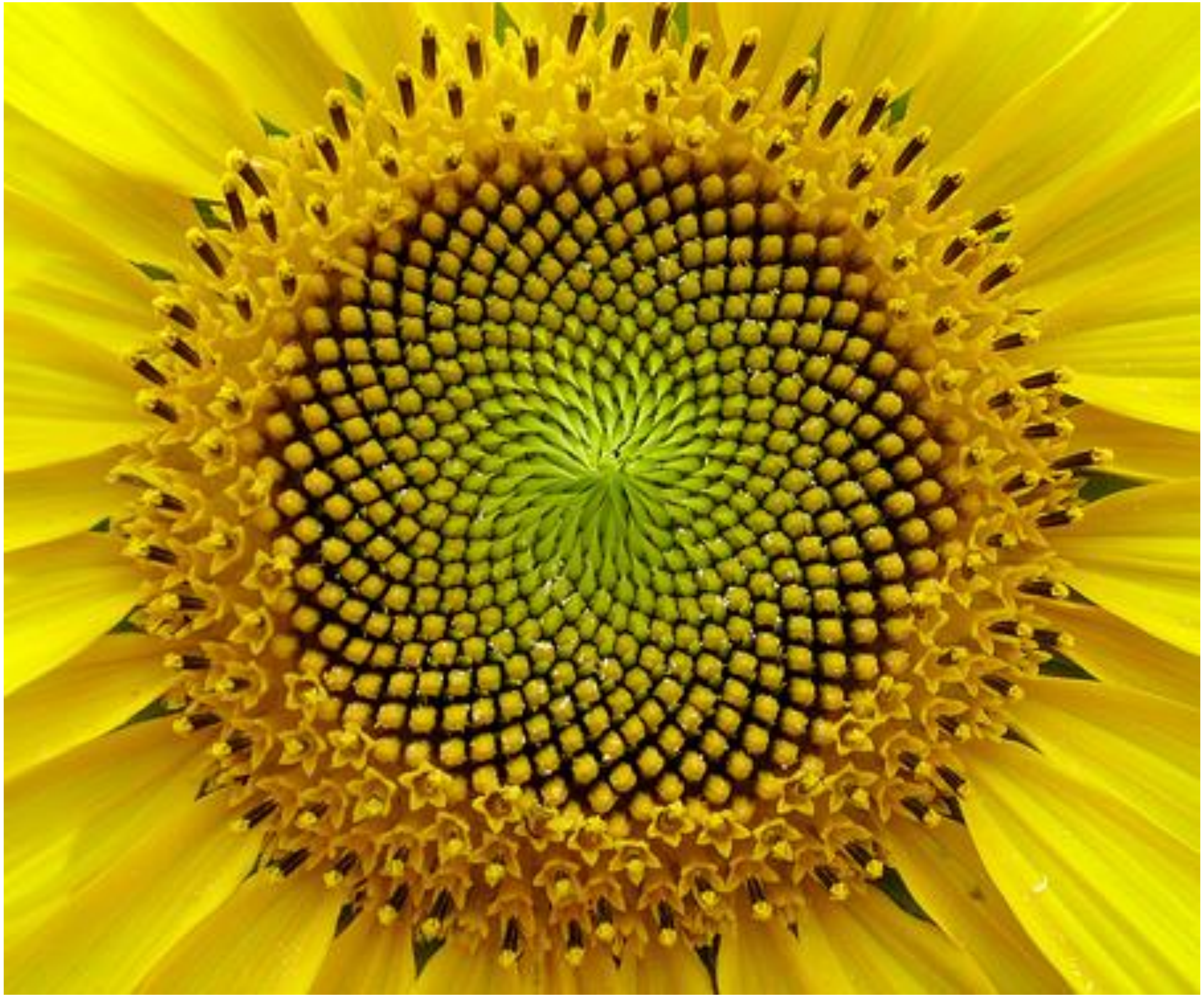
- 1.1 Definition
- 1.2 Sätze
- 1.3 Formel von Binet
- 1.4 Geschichte der Fibonaccizahlen

2. DER GOLDENE SCHNITT.

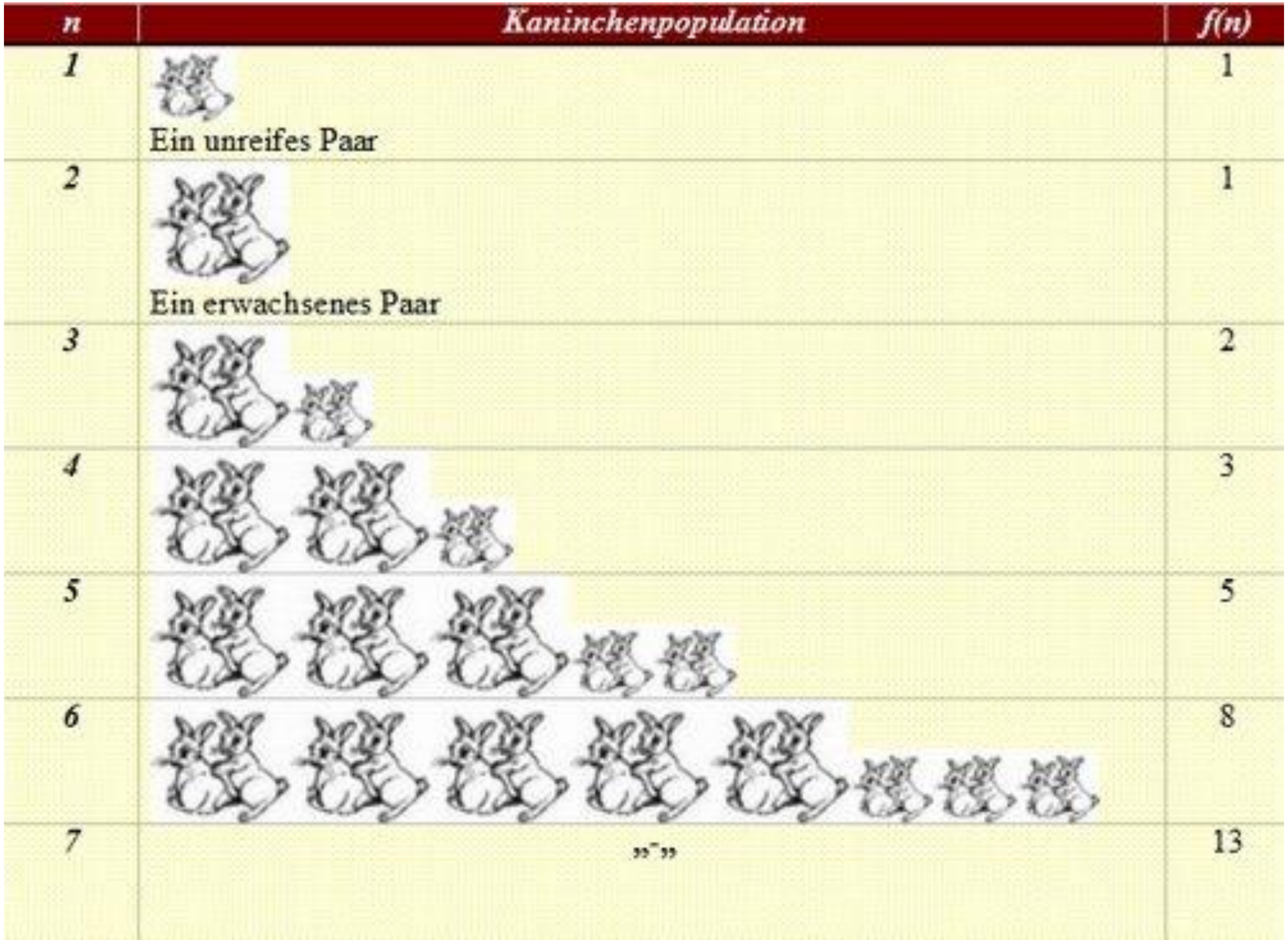
- 2.1 Definition
- 2.2 Mathematische Eigenschaften
- 2.3 Konstruktionsverfahren
- 2.4 Goldene Dinge

3. RELEVANZ.

- 3.1 Zusammenhang
- 3.2 Fibonaccizahlen in der Kunst
- 3.3 Fibonaccibeispiele
- 3.4 Videoempfehlung
- 3.5 Anwendungen des Goldenen Schnitts
- 3.6 Lehrplanverankerung



1. Fibonaccizahlen



n	Kaninchenpopulation	f(n)
1	Ein unreifes Paar	1
2	Ein erwachsenes Paar	1
3		2
4		3
5		5
6		8
7	„-“	13

1.1 Definition

Die Zahlenfolge f_1, f_2, f_3… heißt Fibonaccifolge und die einzelnen Zahlen Fibonaccizahlen, wenn $f_1=1$, $f_2=1$ und wenn für alle $n>2$ gilt: $f_n= f_{n-2}+f_{n-1}$.

→ Rekursionsformel

Satz 1

- Die Summe von n aufeinander folgenden Fibonaccizahlen ist die Übernächste Fibonaccizahl -1.
- $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - 1$

- Beweis:

  Def. 1 $\rightarrow f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \rightarrow f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$

  $\rightarrow$

  $$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2 \\ f_2 &= f_4 - f_3 \\ f_3 &= f_5 - f_4 \\ &\dots \\ f_{n-2} &= f_n - f_{n-1} \\ f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1} \end{aligned}$$

- Bei der Addition der rechten Seiten heben sich alle f_i bis auf f_{n+2} und $-f_2$ wieder auf.

  da f_2 nach Def.1 genau 1 ist folgt damit:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - f_2$$

Also: $$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1 \qquad \square$$

Satz 2

- 1) Die Summe von f_n mit n ungerade und k aufeinander folgenden Fibonaccizahlen ist die Fibonaccizahl von f_{2n}
  - $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$

- 2) Die Summe von f_n mit n gerade und k aufeinander folgenden Fibonaccizahlen ist die Fibonaccizahl von $f_{2n+1}-1$
  - $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1}-1$

Beweis

- 1)

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \\ f_3 &= f_4 - f_2 \\ f_5 &= f_6 - f_4 \\ &\vdots \\ f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2} \end{aligned}$$

$$\overline{f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}}$$

2)

$$\begin{aligned} f_2 &= f_3 - f_1 \\ f_4 &= f_5 - f_3 \\ f_6 &= f_7 - f_5 \\ &\vdots \\ f_{2n} &= f_{2n+1} - f_{2n-1} \end{aligned}$$

$$\overline{f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1 = f_{2n+1} - 1} \quad \square$$

Satz 3

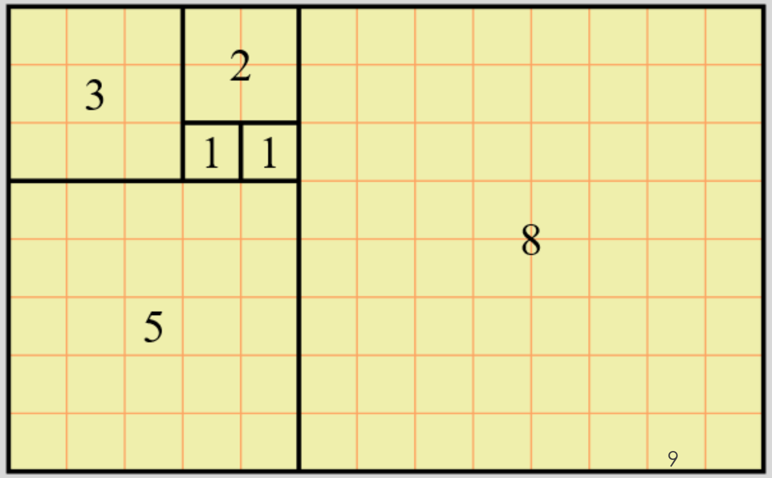
- Die Summe der Quadrate von k aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen ergibt das Produkt der n-ten Fibonaccizahlen und deren Nachfolger

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

- Beweis:
  - Nach Def. 1 $f_{n-1} = f_n - f_{n-2}$ gilt $f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n-1} = f_{n-1}(f_n - f_{n-2}) = f_{n-1}^2$

    $\longrightarrow$ mit $f_1^2 = f_1 \cdot f_2$ gilt

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_1 \cdot f_2 \\ f_2^2 &= f_2 \cdot f_3 - f_1 \cdot f_2 \\ f_3^2 &= f_3 \cdot f_4 - f_2 \cdot f_3 \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$



$$\vdots$$

$$f_{n-1}^2 = f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n-1}$$

$$f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} \cdot f_n$$

$\longrightarrow$ Addition der n Gleichungen

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1} \qquad \square$$

Satz 4

- Je zwei benachbarte Fibonaccizahlen sind teilerfremd.

- Beweis:
  - Beweis durch Widerspruch
  - Annahme: f_n und f_{n-1} sind benachbarte Fibonaccizahlen die nicht teilerfremd sind.
  - Wenn f_n und f_{n-1} einen gemeinsamen Teiler $\mathrm{d} > 1$ haben, dann gilt auch $\mathrm{d}/f_n - f_{n-1}$ das heißt d/f_{n-2}
  - d ist der gemeinsame Teiler von f_{n-1} und f_{n-2}, daher gilt weiterhin $d/f_{n-1} - f_{n-2}$ das heißt d/f_{n-3}
  - Nach m endlichen Schritten ergibt sich d/f_2

  $\longrightarrow$ jedoch ist $f_2 = 1$ und $d > 1$, daher ist f_2 nicht durch d teilbar
  - Annahme wurde somit durch einen Widerspruch wiederlegt
  - Daraus Folgt das je zwei benachbarte Fibonaccizahlen teilerfremd sind $\square$

1.3 Formel von Binet

Lässt sich die n-te Fibonaccizahl als Potenz schreiben? → $f(n) = x^n$

→ Eingesetzt in Def.: $x^{n+1} = x^n + x^{n-1}$

→ Division durch x^{n-1}: $x^2 - x - 1 = 0$ oder $x^2 = x + 1$

→ Lösungen dieser quadratischen Gleichung: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oder $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

→ zwei Lösungen, → Linearkombination aus x_1 und x_2 mit Konstanten A und B erfüllt Rekursionsformel

1.3 Formel von Binet

→erweiterter Ansatz: $f(n) = Ax_1^n + Bx_2^n$

→ Wegen f(0) = 0 und f(1) = 1 folgt: A + B = 0 und $Ax_1 + Bx_2 = 1$

→ B = -A (Erste Gleichung); $A\frac{1+\sqrt{5}}{2} - A\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$ oder $A\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$, also $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$

→Mit B = -A folgt dann: $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

→ $$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

→ Formel von Moivre-Binet (Jacques-Philippe Marie Binet, 1843, bzw. Abraham de Moivre, 1718

Übung

- Nutze die Formel von Binet um folgende Fibonaccizahlen zu berechnen:
- 1.) f(n), n = 25
- 2.) f(n), n = 41
- 3.) f(n), n = 49

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

- Lösung:
- 1.) f(25) = $f(25) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{25} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{25}\right]$ = 75 025
- 2.) f(41) = $f(41) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{41} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{41}\right]$ = 165 580 141
- 3.) f(49) = $f(49) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{49} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{49}\right]$ = 7 778 742 049

1.4 Geschichte der Fibonaccizahlen

- Früheste Erwähnung: 450/200 v. Chr. Unter dem Namen mātrāmeru („Berg der Kadenz“ (Verslehre, metrisch-rhythmisch Gestalt des Versschlusses, hier fallend)) in Chhadah-shāstra („Kunst der Prodosie“, (Linguistik)) (Sanskrit)
- Beschäftigt sich mit rechnerischer Möglichkeit der Bildung von festen Metren in Versen

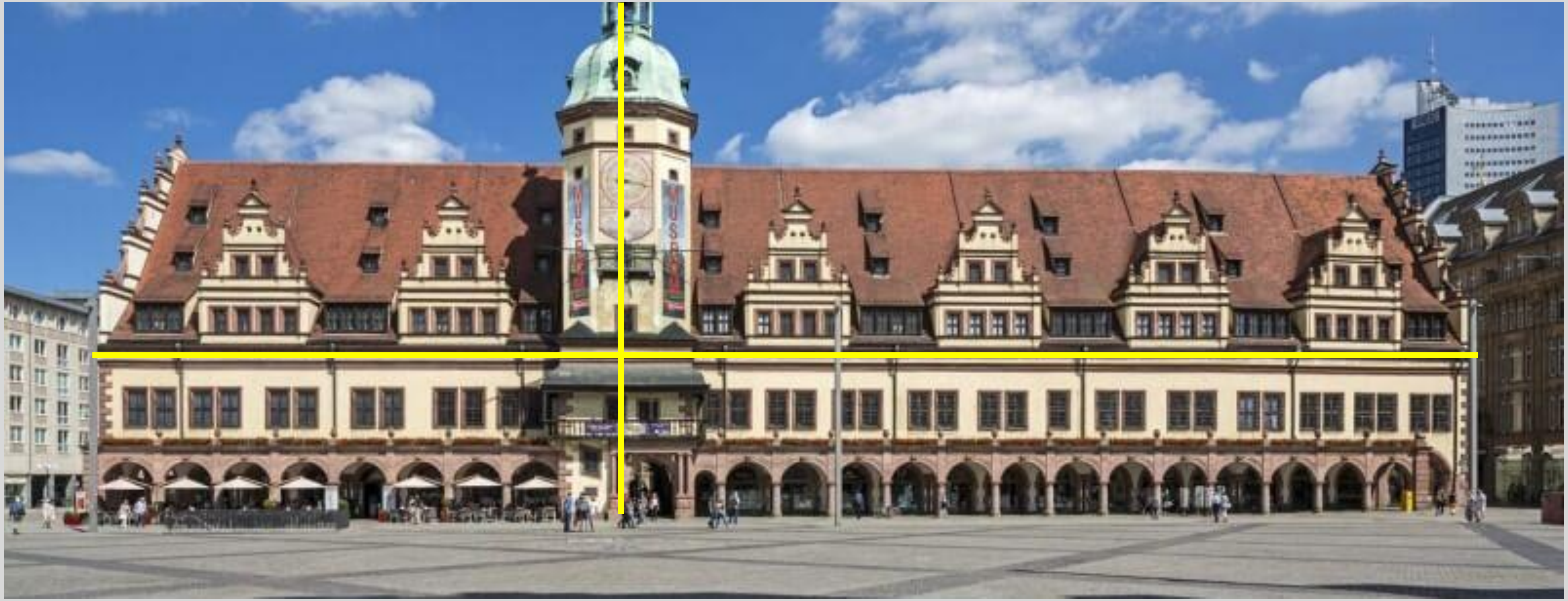
1.4 Geschichte der Fibonaccizahlen

- In der westlichen Welt bereits seit ca. 100 n. Chr. bekannt Nikomachos von Gerasa)
- Philosoph, Mathematiker, Musiktheoretiker

1.4 Geschichte der Fibonaccizahlen

- Leonardo da Pisa (figlio di Bonacci → Fibonacci), Großvater hieß Bonacci; ca. 1170 bis ca. 1240 n. Chr.
- Liber abbaci (1202)
- Bsp.: Kaninchenzüchter
- Seit 2014 bekannt: Hintergrund der Folge liegt in Bienenzucht (nordafrikanische Hafenstadt Bejaia, heutiges Algerien, wichtiger Exporteur von Bienenwachs)

2. Der Goldene Schnitt



2.1 Definition

- Ein Teilungsverhältnis heißt Goldener Schnitt, wenn das Verhältnis des Ganzen zum größeren Teil dem des größeren zum kleineren Teil entspricht.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

- Goldene Zahl (irrational, lässt sich nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellen):

$$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

- Aus einfacher Rechnung folgt: $\Phi = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$

→ Wird häufig auch **„irrationalste aller Zahlen“** genannt, da sie sehr schlecht durch Brüche approximierbar ist (Vgl.: Seminar vom 11.06.2020, Tim Kunzmann, Gianluca Trülzsch: „Annäherung irrationaler Zahlen durch rationale Zalen“)

2.2 Mathematische Eigenschaften

- Algebraische Betrachtung
  - Def.: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

→ Auflösen nach 0 und umstellen

$0 = \frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a}$, für $\Phi = \frac{a}{b}$ folgt $0 = \Phi - 1 - \frac{1}{\Phi}$

→ Quadratische Gleichungen durch Multiplikation mit Φ

$0 = \Phi^2 - \Phi - 1$

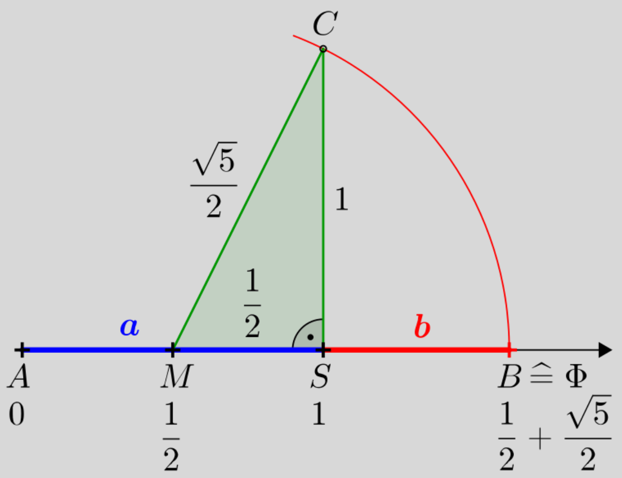
$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$

$\Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618$

→ nur positive Werte können Goldene Zahl sein

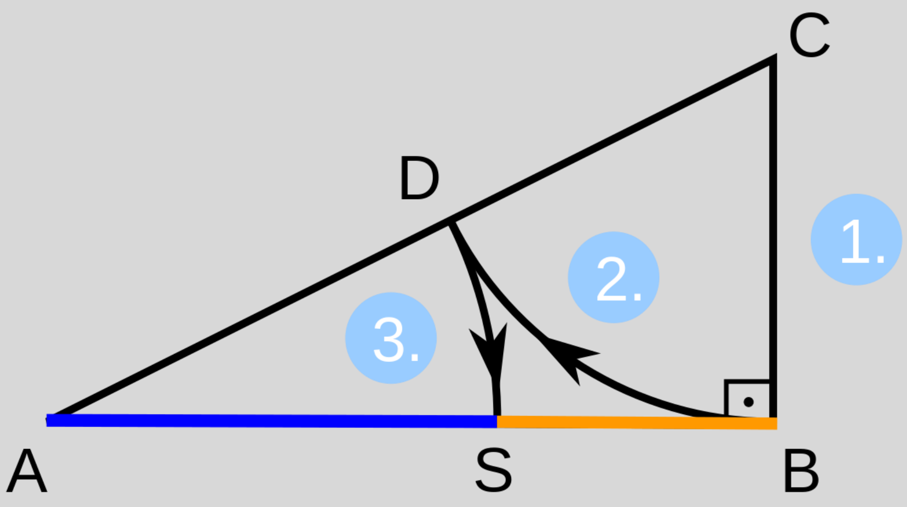
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$

- Geometrische Betrachtung
  - ❖Def.: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ mit Major a=1
  - ❖Auf Zahlengerade wird Punkt A bei 0 eingetragen
    Major a wird als Zahlenwert 1 abgetragen
    ⟶ Schnittpunkt S
  - ❖Einzeichnen des Lots zur Strecke $\overline{AS}$ durch S
    ⟶ Schnittpunkt C entsteht
  - ❖M,S und C bilden rechtwinkliges Dreieck mit $\overline{MS} = \frac{1}{2}$ und $\overline{SC} = 1$
  - ❖Mit Satz des Pythagoras $\overline{MC}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$ erhält man für $\overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
  - ❖Für Minor b wird Kreisbogen um M mit Radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$ eingezeichnet
    ⟶ Punkt B entsteht bei $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
  - ❖Φ nun ablesbar auf Zahlengerade $\overline{AB} = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \mathrel{\hat{=}} \Phi$
    ⟶ Zusammengefasst ergibt es $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$



2.3 Konstruktionsverfahren

Klassisches Verfahren mit innerer Teilung



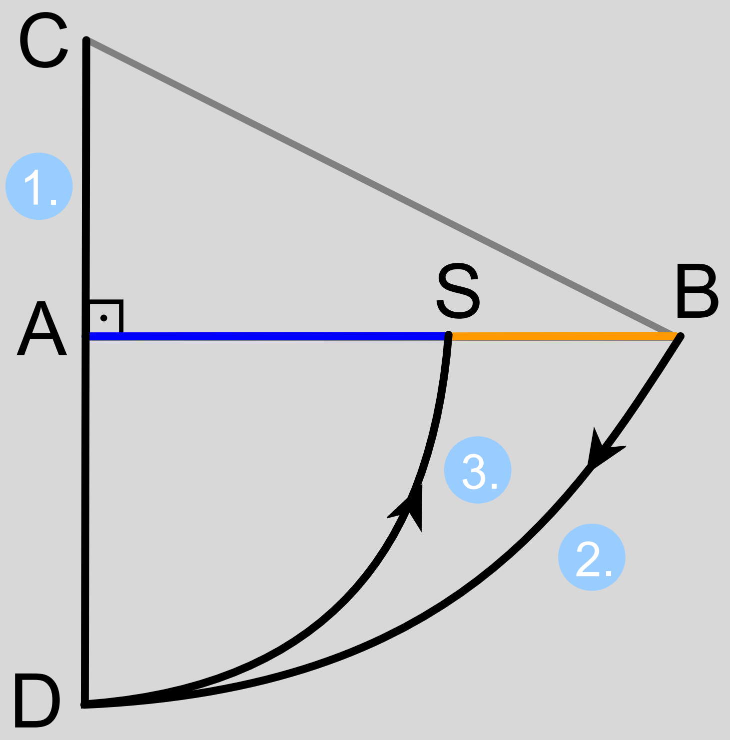
- Errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ im Punkt B die Senkrechte der halben Länge von $\overline{AB}$ mit dem Endpunkt C
- Der Kreis um C mit dem Radius $\overline{CB}$ schneidet die Verbindung $\overline{AC}$ im Punkt D
- Der Kreis um A mit dem Radius $\overline{AD}$ teilt im Punkt S die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnittes

2.3 Konstruktionsverfahren

Innere Teilung nach Euklid

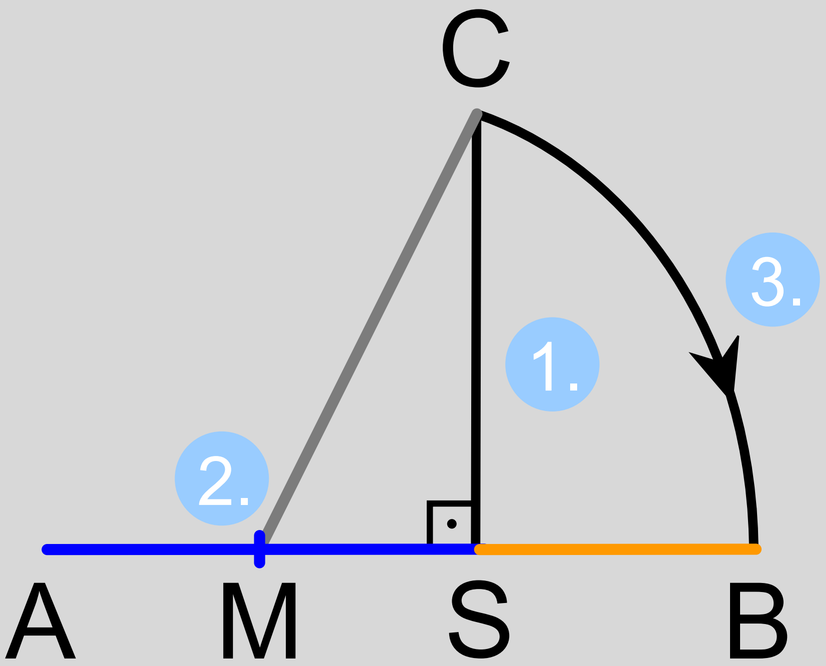
- Von Johann Friedrich Lopez im Jahr 1781 in seinem Buch Euklids Elemente beschrieben

- Errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ im Punkt A die Senkrechte der halben Länge von $\overline{AB}$ mit dem Endpunkt C
- Der Kreis um C mit dem Radius $\overline{CB}$ schneidet die Verlängerung $\overline{AC}$ im Punkt D
- Der Kreis um A mit dem Radius $\overline{AD}$ teilt im Punkt S die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnittes



2.3 Konstruktionsverfahren

Klassisches Verfahren mit äußerer Teilung

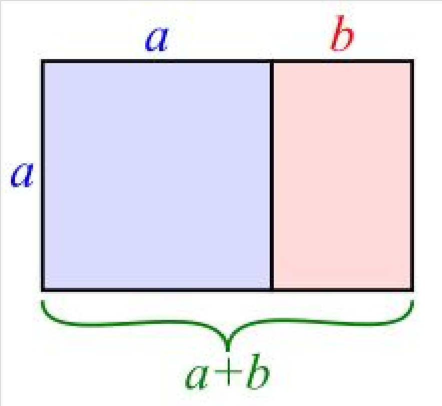


- Errichte auf der Strecke $\overline{AS}$ im Punkt S die Senkrechte der Länge $\overline{AS}$ mit dem Endpunkt C
- Konstruiere die Mitte M der Strecke $\overline{AS}$
- Der Kreis um M mit dem Radius $\overline{MC}$ schneidet die Verlängerung von $\overline{AS}$ im Punkt B
- S teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnittes

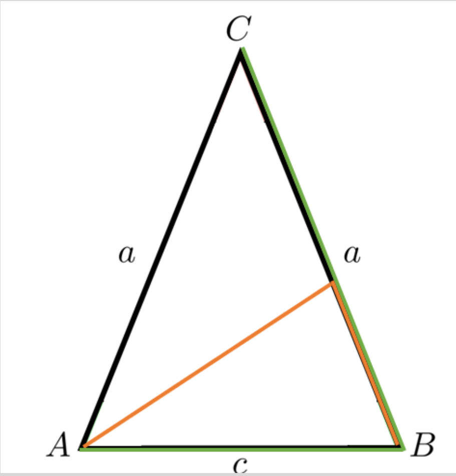
2.4 Goldene Dinge

Goldenes Rechteck und Goldenes Dreieck

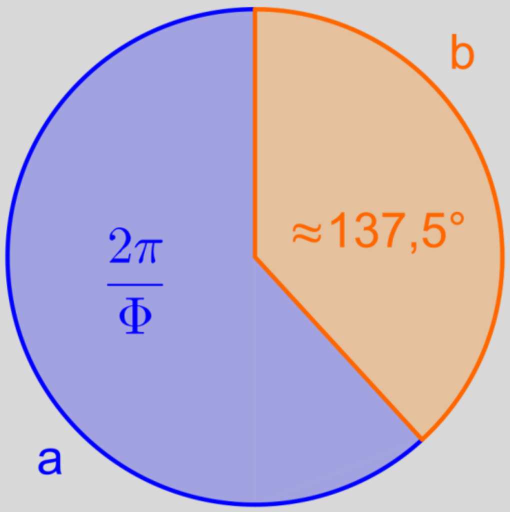
- Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, wird als Goldenes Rechteck bezeichnet



- Ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem zwei Seiten in diesem Verhältnis stehen nennt man Goldenes Dreieck



Der Goldene Winkel



- Teilung eines Vollwinkels im Goldenen Schnitt

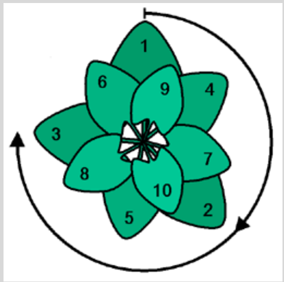
  ⟶ führt zu überstumpfen Winkel $\frac{2\pi}{\Phi} \approx 222{,}5°$

- Gewöhnlich wird $2\pi - \frac{2\pi}{\Phi} \approx 137{,}5°$

  ⟶ gerechtfertigt da Drehung um $\pm 2\pi$ keine Rolle spielt

- Durch wiederholte Drehung um den Goldenen Winkel entstehen neue Positionen z.B. für Blattansätze

  ⟶ durch irrationale Zahl gibt es keine exakte Überdeckung



- n Positionen zerlegen Kreis in n Ausschnitte

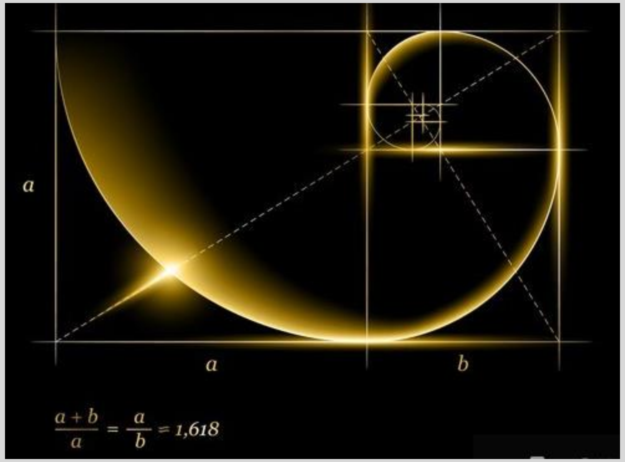
  ⟶ n Ausschnitte mit maximal 3 verschiedenen Winkeln

Goldene Spirale

- Sonderfall der logarithmischen Spirale
- Durch rekursive Teilung eines Goldenen Rechtecks in ein Quadrat und ein kleineres Goldenes Rechteck
- Approximiert von einer Folge von Viertelkreisen

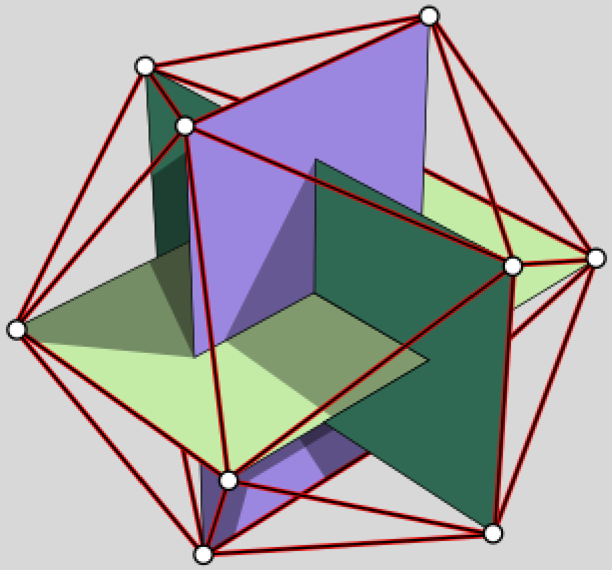
$\longrightarrow$ Radius ändert sich bei jeder 90°-Drehung um den Faktor Φ

- Es gilt $\mathrm{r}(\theta) = ae^{k\theta} = a\Phi^{\frac{2\theta}{\pi}}$ mit Steigung $k = \pm\frac{\ln\Phi}{\alpha_{\llcorner_{\llcorner}}}$ wobei $\alpha_{\llcorner} = \frac{\pi}{2}$ der Zahlenwert für den rechten Winkel angibt



Goldener Schnitt im Ikosaeder

- Die 12 Ecken des Ikosaeders bilden die Ecken von drei gleich großen senkrecht, aufeinander stehenden Rechtecken die einen gemeinsamen Mittelpunkt haben
- Die Rechtecke haben das Seitenverhältnis des Goldenen Schnittes
- Anordnung der drei Rechtecke wird Goldener-Schnitt-Stuhl genannt

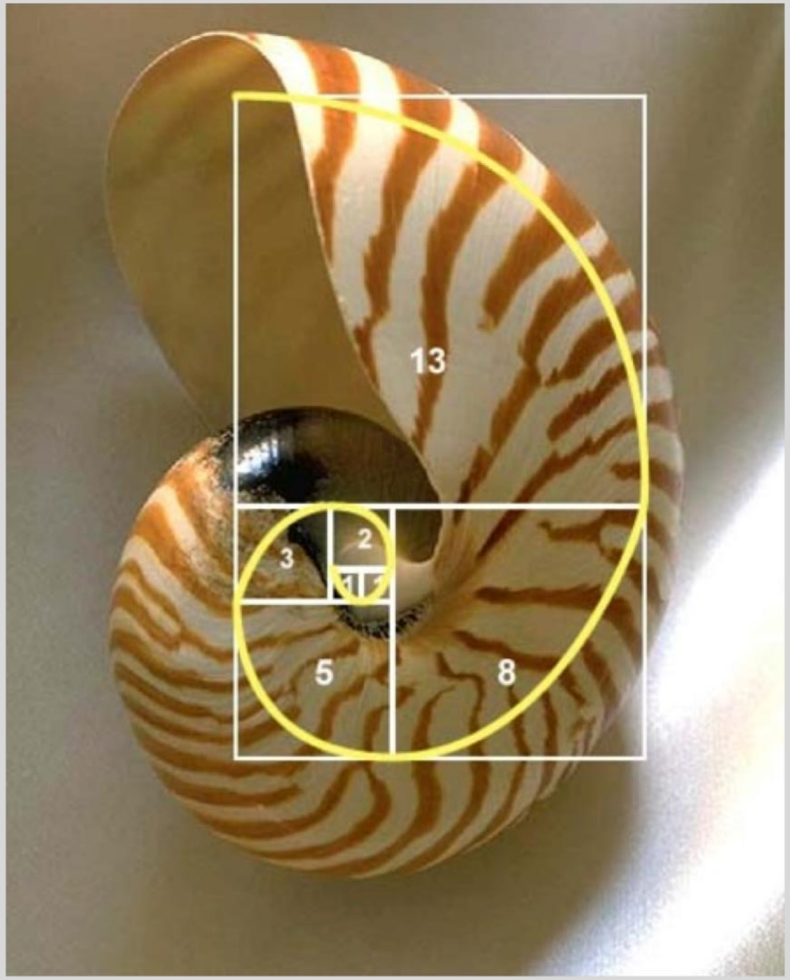


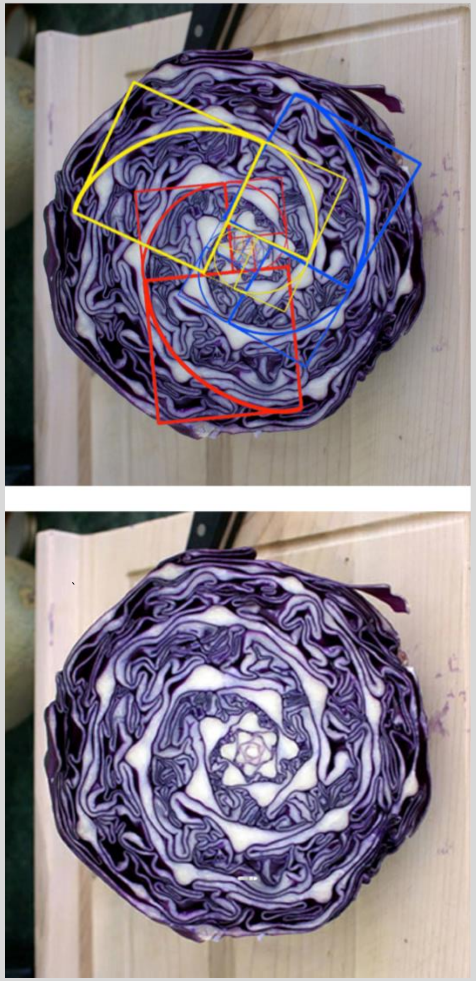
Die Goldene Zahlenfolge

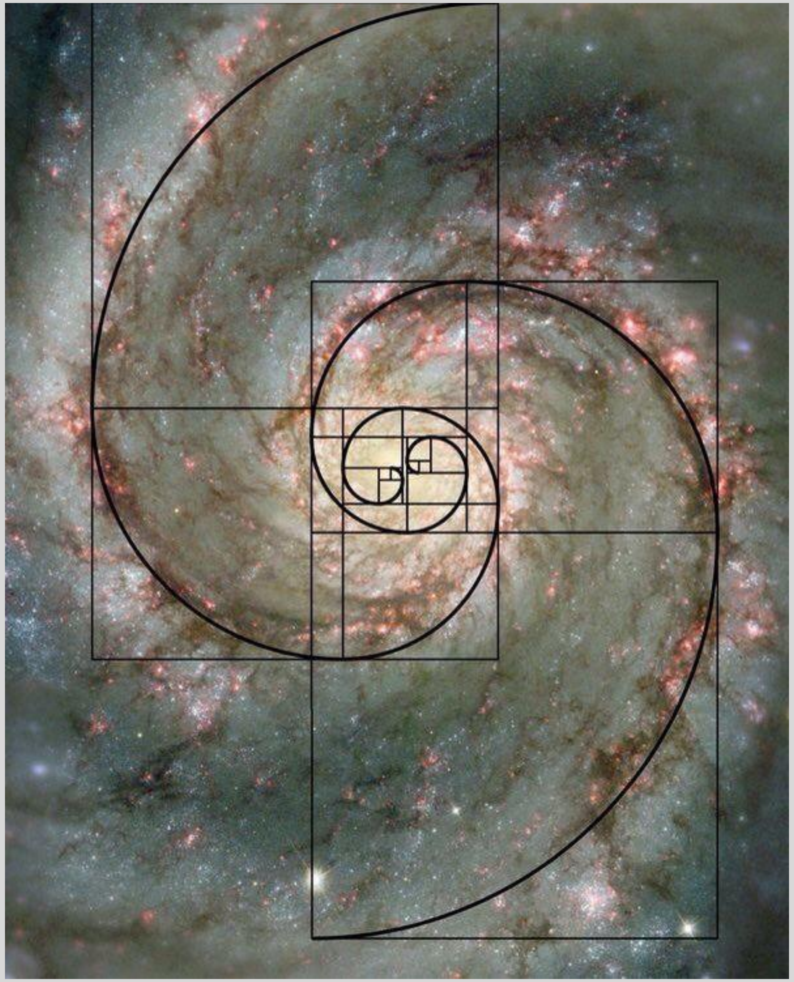
- Zu einer Goldenen Zahlenfolge für $a_0 = 1$ lässt sich eine Folge $a_z \coloneqq \Phi^z \cdot a_0$ für $z \in \mathbb{Z}$ konstruieren
- Je drei aufeinanderfolgenden Glieder (a_{z-1}, a_z, a_{z+1}) bilden einen Goldenen Schnitt

  $\longrightarrow$ $\frac{a_z}{a_{z-1}} = \frac{a_{z+1}}{a_z}$ sowie $a_{z+1} = a_z + a_{z-1}$ für alle $z \in \mathbb{Z}$
- Spielt wichtige Rolle in der Proportionslehre in Kunst und Architektur

3. Relevanz







3.1 Zusammenhang

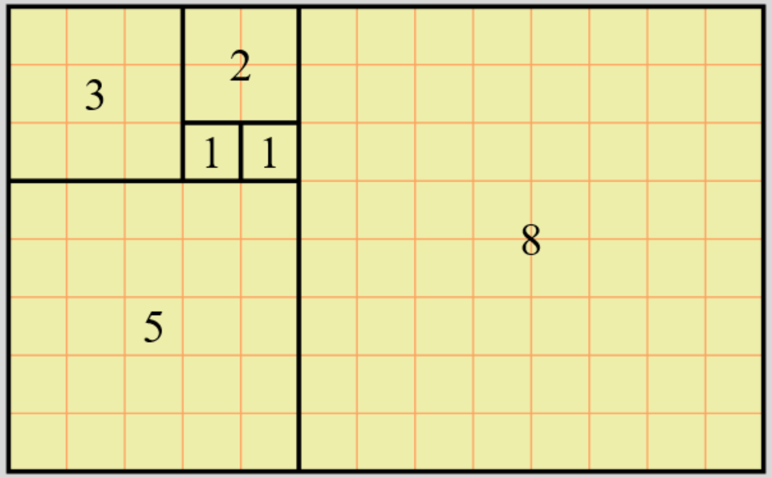
- Die Bedingungen der goldenen Zahlenfolge:

$$\frac{a_z}{a_{z-1}} = \frac{a_{z+1}}{a_z} \text{ sowie } a_{z+1} = a_z + a_{z-1} \text{ für alle } z \in \mathbb{Z}$$

- → ersichtlich: goldener Schnitt und Fibonaccizahlen haben etwas miteinander zu tun
- Darüber hinaus: Formel von Binet: der Goldene Schnitt taucht bei der Berechnung beliebiger Fibonaccizahlen auf

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

- Denn: In der unendlichen Fibonaccifolge strebt das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen gegen den Goldenen Schnitt.



3.1 Zusammenhang

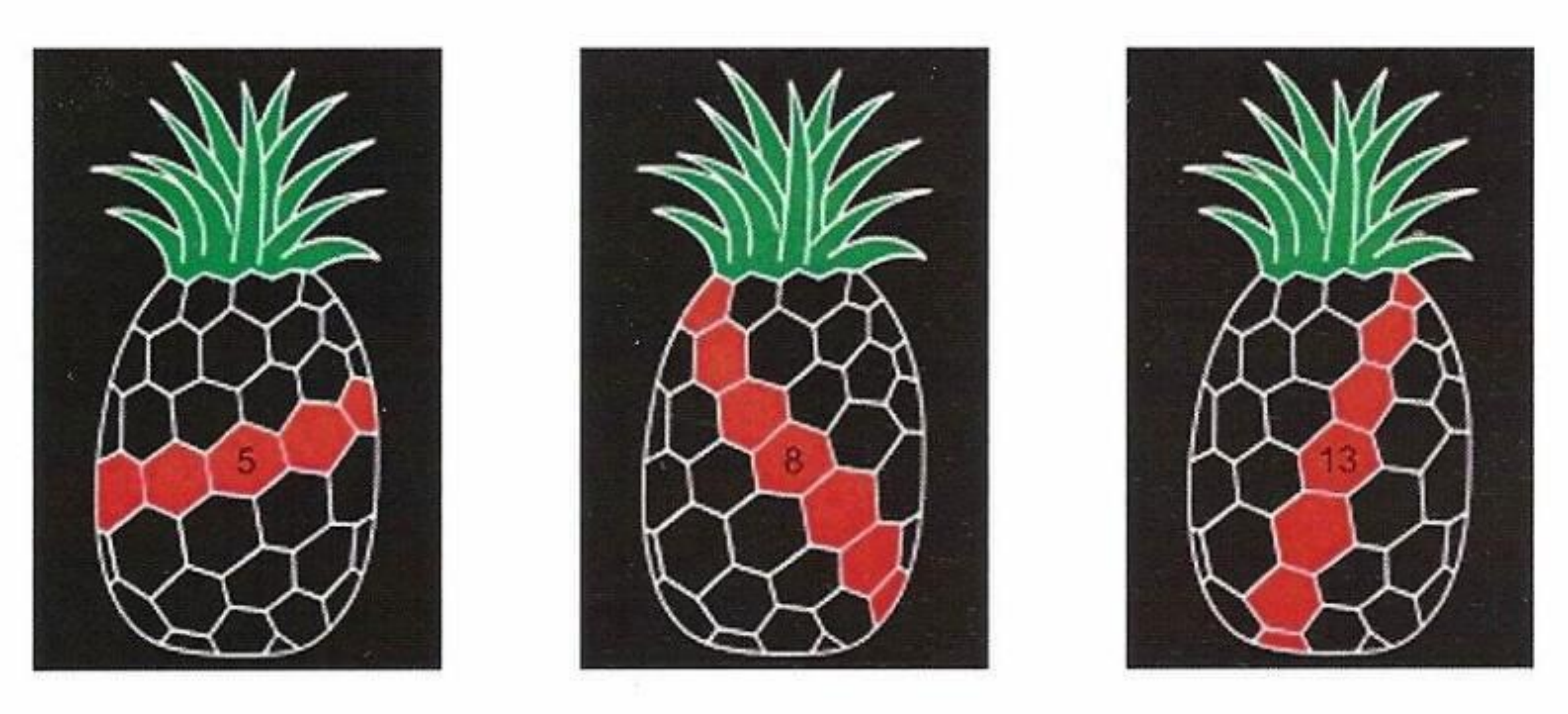
Verhältnisse aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen			
f_n	f_{n+1}	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	Abweichung zu Φ in %
1	1	= 1,0000	−38
1	2	= 2,0000	+23
2	3	= 1,5000	−7,3
3	5	≈ 1,6667	+3,0
5	8	= 1,6000	−1,1
8	13	= 1,6250	+0,43
13	21	≈ 1,6154	−0,16
21	34	≈ 1,6190	+0,063
34	55	≈ 1,6176	−0,024
55	89	≈ 1,6182	+0,0091
89	144	≈ 1,6180	−0,0035
144	233	≈ 1,6181	+0,0013

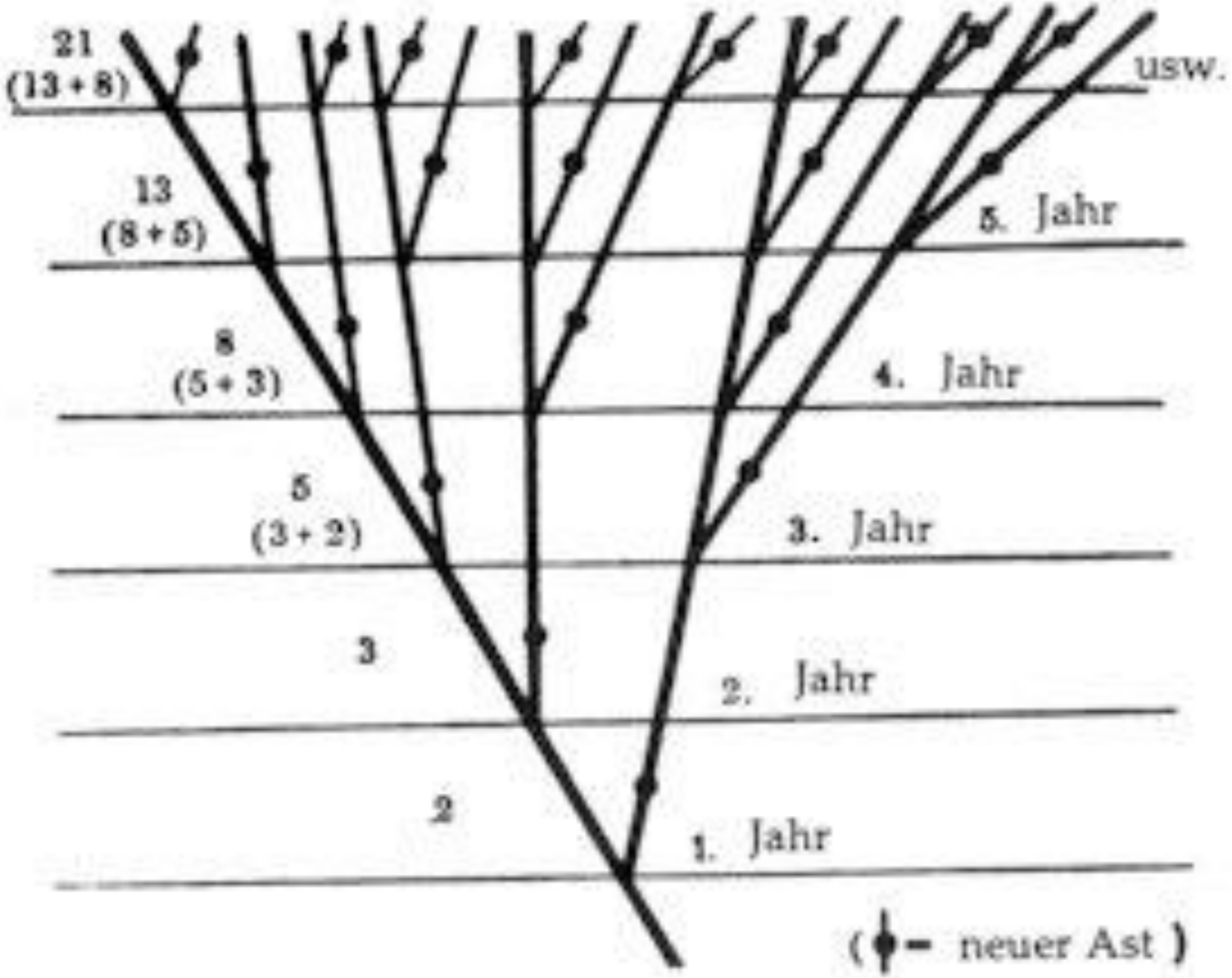
3.2 Fibonaccizahlen in der Kunst

- Petra Pfaffenholz: Fibonacci Cubes (Teil des Skulpturenpfades „Diepholz|Dümmer“), 2014
- Würfel mit Kantenlänge 10 cm bis 5,50 m

- Weitere Beispiele: Züricher Hauptbahnhof, sowie weitere Gebäude und Installationen

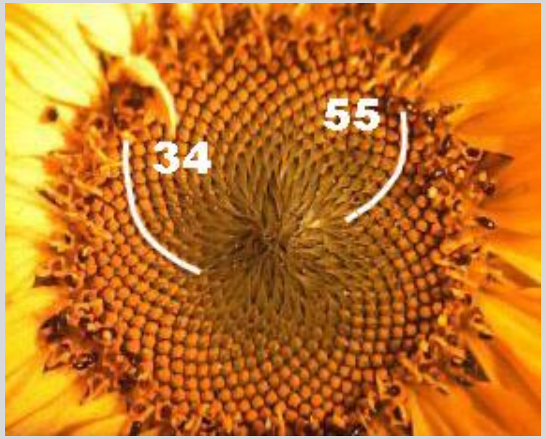
3.3 Fibonaccibeispiele

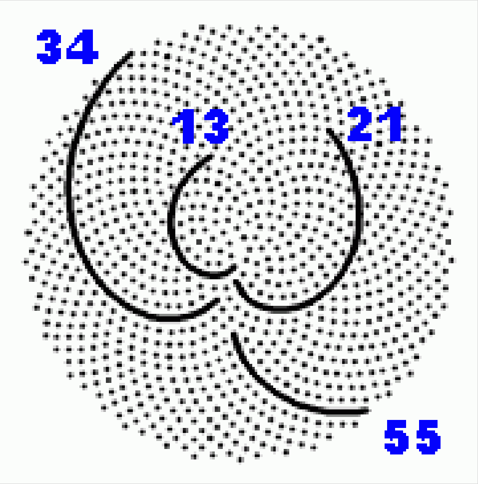




3.3 Fibonaccibeispiele

3.3 Fibonaccibeispiele





Phyllotaxis (Biologie)

- 55 rechtsdrehende Spiralen
- 34 linksdrehende Spiralen

- Ananas (5 flach, 8 steil verlaufende Spiralen)
- Kiefernzapfen (8 und 13)
- …

- Drehwinkel recht genau 222,5° ≙ etwa dem Teilungsverhältnis des goldenen Winkels (222,48°)

3.4 Videoempfehlung
Ein Trick basierend auf der Fibonaccifolge

https://www.youtube.com/watch?v=PfGeKvK6GNA&t=1s

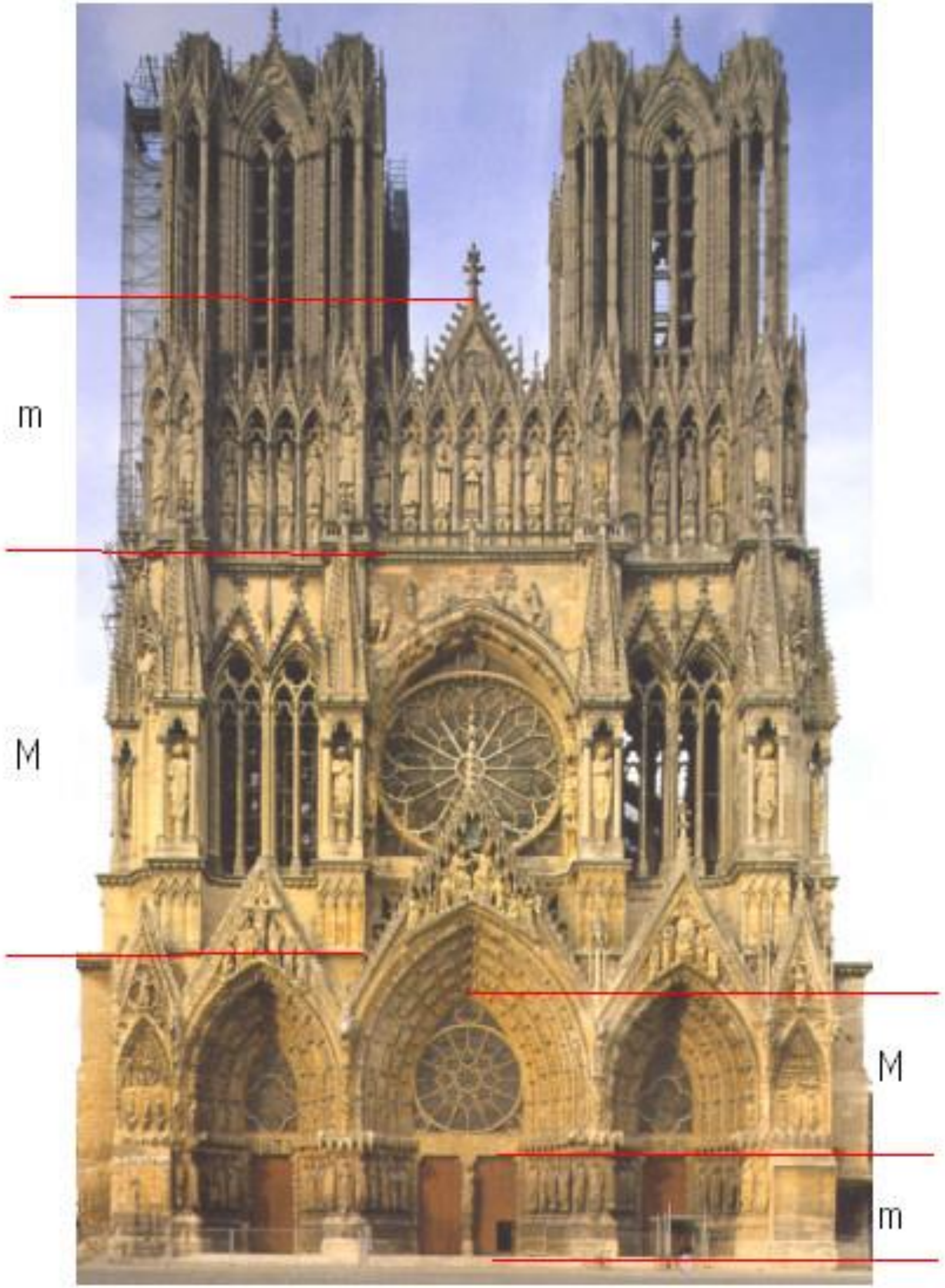
John Hush
→ Lohnt sich mal anzuschauen

3.5 Anwendungen des Goldenen Schnitts

◦ **Papier- und Bildformate**

3.5 Anwendungen des Goldenen Schnitts

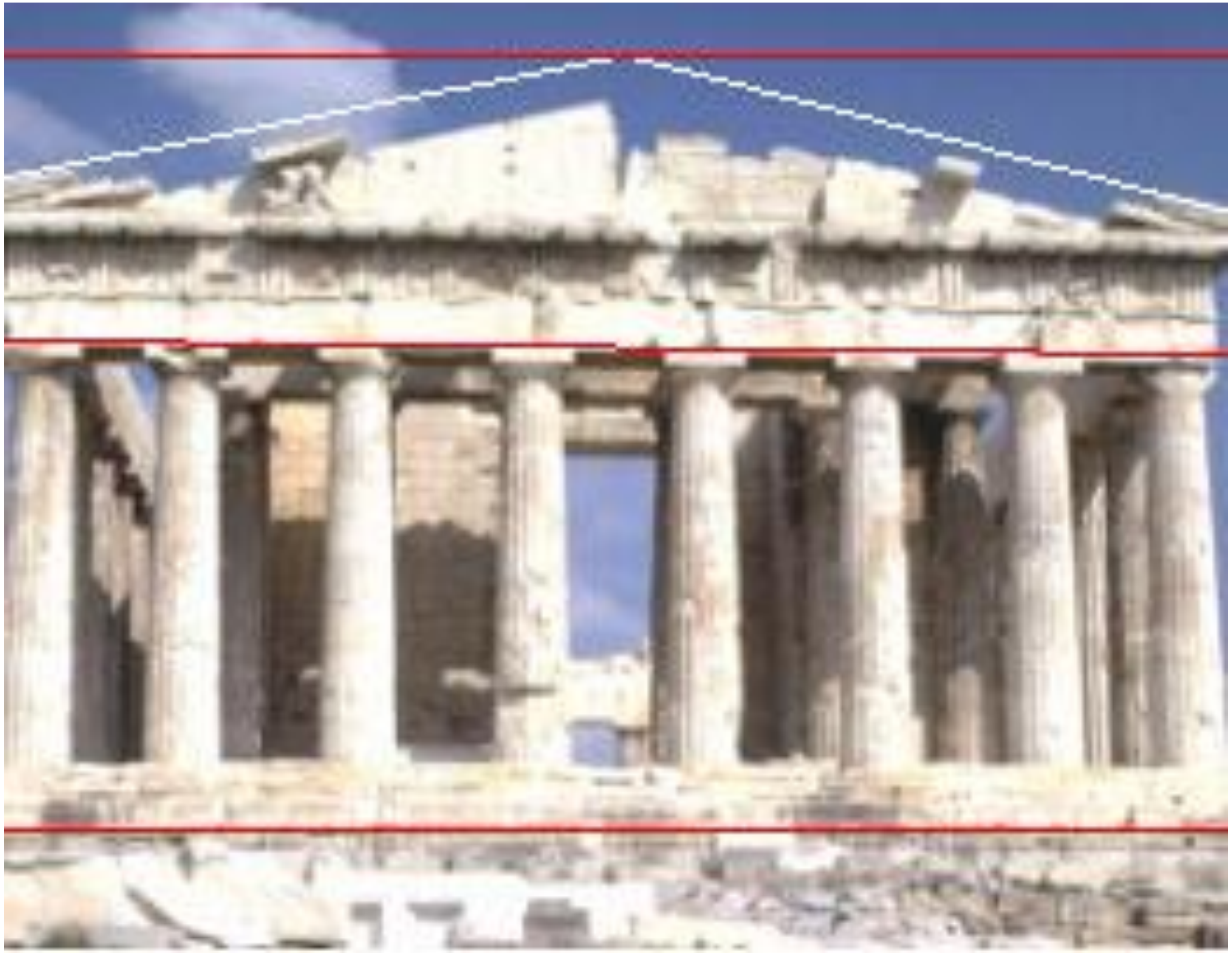
◦ **Architektur**



3.5 Anwendungen des goldenen Schnitts

Architektur

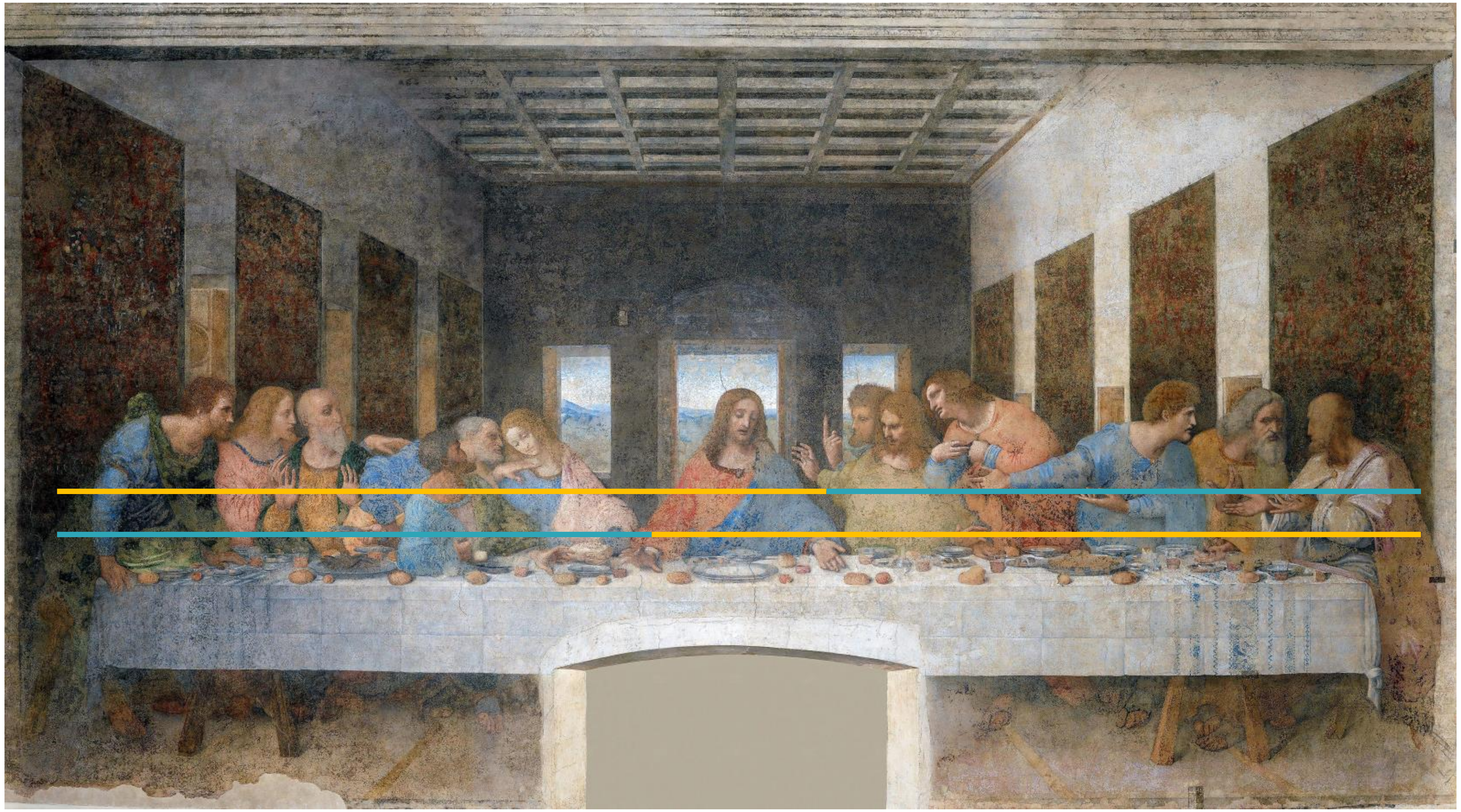
- Notre Dame de Reims



3.5 Anwendungen des goldenen Schnitts

Architektur

- Parthenon



3.5 Anwendungen des Goldenen Schnitts

Bildende Kunst

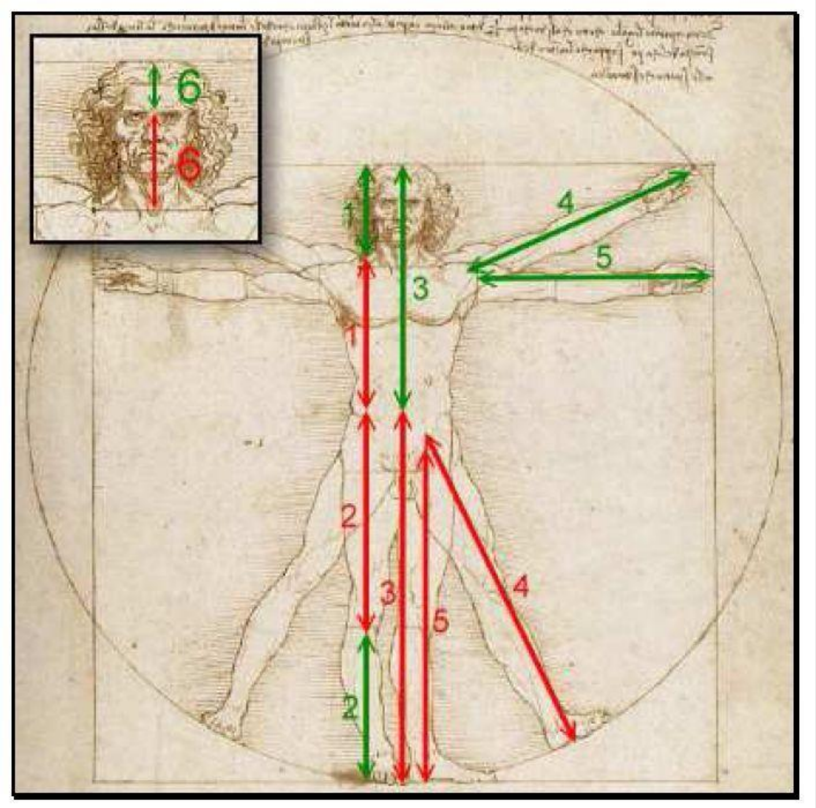
Wichtiges Kompositionsmittel seit der Renaissance

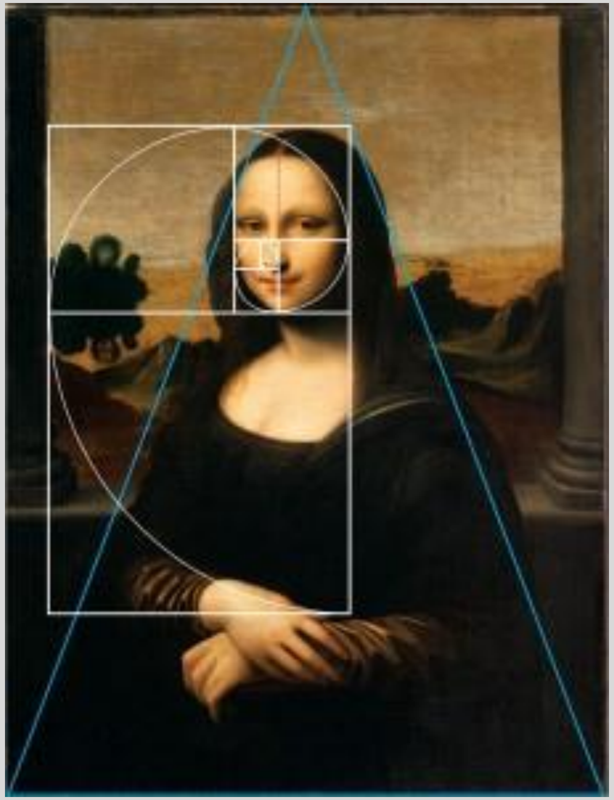
Beispiel:

Leonardo da Vinci: Das Abendmahl

→ Jesus und eine Apostelgruppe bilden Major, jeweils Rest den Minor

3.5 Anwendungen des Goldenen Schnitts





3.5 Anwendungen des Goldenen Schnitts

- **Akustik und Musik**
- Beispiel eines Tonintervalls im Goldenen Schnitt (etwas größer als eine große Sexte)
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b3/Goldener_Schnitt.ogg
- → für menschliche Ohren eher unangenehm, da harmonische Tonintervalle diejenigen sind, deren Verhältnis ihrer Schwingungsfrequenzen sich als Bruch möglichst kleiner ganzer Zahlen darstellen lässt, der Goldene Schnitt jedoch eine irrationale Zahl ist
- Instrumentenbau
- Komposition

3.5 Anwendungen des Goldenen Schnitts

- **Informatik**
- In der Datenverarbeitung werden Daten in Hashtabellen gespeichert

  $\longrightarrow$ Für einen schnellen Zugriff müssen Datensätze möglichst gleichmäßig verteilt werden
- Durch Verfahren des Goldenen Schnitts wird eine numerische Näherung für eine Extremstelle einer reellen Funktion berechnet
- Das Optimierungsverfahren teilt das Suchintervall im Goldenen Schnitt durch den Parameter $\tau = \Phi - 1$ wodurch zwei Punkte $x = b - \tau(b-a)$ und $x' = a + \tau(b-a)$ entstehen

3.6 Lehrplanverankerung

- Lehrplan Mathematik Klassenstufe 9 Realschulbildungsgang Wahlbereich 1: Goldener Schnitt

Wahlbereich 1: Goldener Schnitt

Kennen des Goldenen Schnittes als Streckenverhältnis - Berechnen des Teilungsverhältnisses - Entdecken des Vorkommens des Goldenen Schnittes in Architektur, Kunst und Natur	⇒ ästhetisches Empfinden ➔ Kl. 8, LB 4 ➔ KU, Kl. 9, LB 1 ⇒ Medienbildung: traditionelle und digitale Medien als Quelle für Informationen Altes Rathaus in Leipzig, Parthenontempel in Athen, Dom in Florenz Raffael: Sixtinische Madonna, da Vinci: Mona Lisa, Dürer: Selbstbildnis von 1500 Sonnenblume, Proportionen an Lebewesen Recherchen im Heimatort, in Museen, Bibliotheken oder im Internet
Kennen einer Konstruktion zum Goldenen Schnitt	

3.6 Lehrplanverankerung

- Lehrplan Kunst Klassenstufe 7 Lernbereich 1: Gestalten auf der Fläche (Bildkomposition)

Lernbereich 1: Gestalten auf der Fläche **8 Ustd.**

Anwenden grafischer Gestaltungsmittel und des Gestaltungsmittels Farbe	Bildgegenstand, -farbe, -raum, -komposition, -spannung, -einheit, -form, -bewegung Frans Hals, Caspar David Friedrich, Wassily Kandinsky, Marc Chagall, Lea Grundig, Werner Tübke, Jan Buck, Dagmar Ranft-Schinke, Michael Morgner, regionale Künstler
- bekannte Techniken und Ausdrucksmittel nutzen	Textcollagen, Drucktechniken, Fotografie, Werbung, Computergrafik/Vektorgrafik, Plakat ➔ INF, Kl. 7, LB 1
- problembezogene Kunstrezeption	Albrecht Dürer, Henri de Toulouse-Lautrec, Max Ernst
Einblick gewinnen in die Symbolik bildnerischer Gestaltungsmittel und Bildinhalte	Erfahrungswelt der Schüler Tafelmalerei des Mittelalters, Heraldik, Werbung, Piktogramme ➔ GE, Kl. 7, LB 1 ⇒ Medienbildung: Auseinandersetzen mit der eigenen Lebenswelt

3.6 Lehrplanverankerung

- Lehrplan Kunst Klasse 9 Lernbereich 1: Gestalten auf der Fläche

Lernbereich 1: Gestalten auf der Fläche	10 Ustd.
Kennen von Möglichkeiten, Bildraum auf der Fläche zu erzeugen	Überschneidungen/Verdeckungen, Größenunterschiede, Hell-Dunkel/Schatten,
Mittel und Methoden der Darstellung von Körper und Raum auf der Fläche	Perspektive, Farbe
Anwenden grafischer Gestaltungsmittel sowie des Gestaltungsmittels Farbe im Spannungsfeld von Fläche und Raum	Nutzen geeigneter Beispiele aus der Kunstgeschichte Einsatz digitaler Zeichenprogramme ägyptische Kunst, mittelalterliche Kunst, Renaissance, barocke Illusionsmalerei, Kubismus, Op Art Canaletto (Bernardo Belotto), M.C. Escher, Victor Vasarély, Ben Willikens Giovanni Piranesi, Hercules Seghers, Lyonel Feininger, Hans Theo Richter, Werner Tübke
Einblick gewinnen in Gesetze der visuellen Wahrnehmung	Rudolf Arnheim: Anschauliches Denken
Einblick gewinnen in die Darstellungsmöglichkeiten der menschlichen Figur	Proportionslehre, Figur und Format, Figur und Raum Abstraktion, Verfremdung vergleichende Kunstbetrachtung: Leonardo da Vinci, Gottfried Bammes, Käthe Kollwitz, Willi Sitte, Wolfgang Mattheuer, Cindy Sherman, Thomas Ruff → LB 2 → LB 3

Zeit für Fragen, Hinweise, Anmerkungen

Quellen

- Titelbild: https://anjanolte.com/wp-content/uploads/2017/08/Anja_Nolte_MfK_Der_goldene_Schnitt_Fibonacci_Pflanzen_Hypnose.jpg; 25.06.2020
- Abb. Sonnenblume: https://www.loremipsum.at/wp-content/uploads/2011/11/fibonacci-sunflower.jpg; 07.05.2020
- Abb. Vermehrung von Kaninchen: http://www.mat.uc.pt/~mat1164/8996_kaninchen.jpg; 11.06.2020
- Abb. Altes Rathaus: https://www.stadtrundfahrt.com/upload/system/experience/cc00965daa2578415efae9229e6b4dff.jpg; 07.05.2020
- https://transinformation.net/wp-content/uploads/2015/06/Hl-Geom-45.png; 11.06.2020
- https://transinformation.net/wp-content/uploads/2015/06/Hl-Geom-43.png; 11.06.2020
- https://i.pinimg.com/originals/16/b0/e9/16b0e956dd20155730a22aa4644e825e.jpg; 11.06.2020
- Abb. Goldener Schnitt 1: Von Daniel Seibert, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4137790; 25.06.2020
- Abb. Goldener Schnitt2: Von Konstantin1996, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15189286; 25.06.2020
- Abb. Goldener Schnitt3: Von Wolfgang Beyer (Quelle in PNG) & Konstantin1996 (PNG → SVG) - Golden section construction 3.png (Vorgänger)Diese W3C-unbestimmte Vektorgrafik wurde mit Inkscape erstellt., CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6557327; 25.06.2020
- Abb. Fibonaccisonnenblume: Von Dr. Helmut Haß, Koblenz - Übertragen aus de.wikipedia nach Commons durch Esculapio mithilfe des CommonsHelper., CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6937595; 25.06.2020
- Abb. Fibonaccisonnenblumenschema: Von Wolfgangbeyer in der Wikipedia auf Deutsch - Übertragen aus de.wikipedia nach Commons durch Esculapio mithilfe des CommonsHelper., CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6937582; 25.06.2020
- Abb. Fibonaccirechteck: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/95/FibonacciBlocks.svg; 25.06.2020
- Abb. Math. Eigenschaften Geometrie: https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#/media/Datei:01-Goldener_Schnitt_Formel.svg : 26.6.2020
- Abb. Goldenes Rechteck: https://de.wikipedia.org/wiki/Goldenes_Rechteck : 27.6.2020
- Abb. Goldener Winkel https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#/media/Datei:01-Goldener_Winkel.svg 27.6.2020

- Abb. Goldener Winkel Blätter: https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#/media/Datei:Goldener_Schnitt_Blattstand.png
- Abb. Goldene Spirale golden: https://img.pixers.pics/pho_wat(s3:700/FO/34/29/14/72/700_FO34291472_c2163ec1660833d82dd77eec10af6734.jpg,700,500,cms:2018/10/5bd1b6b8d04b8_220x50-watermark.png,over,480,450,jpg)/fototapeten-goldener-schnitt-verhaltnis-gottliche-anteil-und-goldene-spirale.jpg; 28.6.2020
- Abb. Fibonacci-Würfel:

  Von Corradox - Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=36356799; 29.06.2020
- Abb. Nikomachos von Gerasa: Von unbekannt - aus:http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Nicomachus.html, Bild-PD-alt, https://de.wikipedia.org/w/index.php?curid=515161; 29.06.2020
- Abb. Leonardo da Pisa: Von unknown 19th-century artist - Scan from "Mathematical Circus" by Martin Gardner, published 1981, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10604074; 29.06.2020
- Abb. Leonardo da Vinci: Das Abendmahl: Von Paris Orlando - Eigenes Werk, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=84332110; 29.06.2020
- Abb. Papier- und Bildformate: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4c/Goldener_Schnitt_Rechtecke_Aspect_ratio_compare6.png; 29.06.2020
- https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt; 29.06.2020
- https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge; 29.06.2020
- https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/kunst/artikel/proportion-und-goldener-schnitt#; 29.06.2020
- http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/bericht_jochen.pdf; 29.06.2020
- http://theissenonline.de/Mathematik/Formel%20von%20Moivre_Binet.pdf; 29.06.2020
- Abb. Notre Dame de Reim, Parthenons: http://michael-holzapfel.de/themen/goldenerschnitt/gs-arch-kunst/gs-arch-kunst.htm; 29.06.2020
- Abb. Ananas: http://www.was-darwin-nicht-wusste.de/images/ananas.jpg; 30.06.2020
- Abb. Äste: http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/lene/f027.jpg; 29.06.202
- Abb. Vitruvianischer Mensch: https://i.pinimg.com/736x/83/fe/9a/83fe9a5a73dd8524efd904195fcb140e--human-body-leonardo.jpg; 01.07.2020
- Abb. Mona Lisa: https://i0.wp.com/monalisa.org/wp-content/uploads/2012/09/02-ml-ps-emlgoldenspiral-03-940x1234-228x300.jpg?resize=228%2C300; 01.07.2020