Über Fasersequenzen in der Motivischen Homotopietheorie von Schemata

Matthias Wendt

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der motivischen bzw. $\mathbb{A}^1$-Homotopietheorie von Schemata, einem Teilgebiet der algebraischen Geometrie, in dem Konstruktionen der abstrakten Homotopietheorie auf algebraische Varietäten und Schemata angewendet werden. Die Herangehensweise, Intuition und Methoden aus der Topologie für die algebraische Geometrie nutzbar zu machen, hat sich wiederholt bewährt. Beispielsweise hätte die algebraische K-Theorie, deren Studium wir bereits tiefe Einsichten in die Natur der linearen Algebra über kommutativen Ringen verdanken, wahrscheinlich nicht ihre heutige Form, wären nicht immer wieder ausgefeilte Methoden der algebraischen Topologie zum Einsatz gekommen.

Eine Motivation für die Entwicklung einer Homotopietheorie für Schemata begründet sich in der Analogie zwischen Mannigfaltigkeiten und glatten Schemata, sowie den weitreichenden Anwendungen der klassischen algebraischen Topologie auf geometrische Fragestellungen. Um zum Beispiel die Existenz von Vektorbündeln mit vorgegebenen Eigenschaften auf Mannigfaltigkeiten zu untersuchen, übersetzt man das Problem zuerst in eine Fragestellung der algebraischen Topologie, indem man klassifizierende Räume konstruiert. Die geometrische Fragestellung kann dann auf die Berechnung von Homotopiegruppen reduziert werden. Es steht zu erwarten, daß die $\mathbb{A}^1$-Homotopietheorie es ermöglicht, genau diese Art von Argumenten in der algebraische Geometrie anwenden zu können.

Diese allgemeine Analogie, sowie einige wenige existierende Berechnungen von $\mathbb{A}^1$-Homotopiegruppen begründen die Notwendigkeit, die motivische Homotopietheorie eingehender zu untersuchen. Bereits in der klassischen algebraischen Topologie kann man nur für wenige Räume die Homotopiegruppen direkt berechnen, und die umfassend eingesetzte Berechnungsmethode sind Fasersequenzen $F \to E \to B$, die lange exakte Sequenzen für die Homotopiegruppen induzieren. Insbesondere Faserbündel, wie zum Beispiel $SO(n)$-Bündel oder projektive Bündel, liefern Fasersequenzen geometrischen Ursprungs.

Das Ziel der Arbeit ist es, die Theorie der Fasersequenzen im Kontext der $\mathbb{A}^1$-Homotopietheorie näher zu studieren. Aufgrund der Definition der $\mathbb{A}^1$-Homotopietheorie im Rahmen von Quillen's homotopischer Algebra existiert bereits ein Begriff von Fasersequenzen, und man kann zeigen, daß es für jede Abbildung von Schemata $p : E \to B$ eine entsprechende Fasersequenz $F \to E \to B$ gibt. Allerdings stimmt der Raum F nicht notwendigerweise mit den offensichtlichen Fasern $p^{-1}(b)$, den Urbildern von Punkten in B, überein. Die Hauptergebnisse der Arbeit beschreiben Kriterien, unter denen man F wirklich mit den "richtigen" Fasern identifizieren kann. Mit Hilfe dieser Kriterien lassen sich Fasersequenzen in der $\mathbb{A}^1$-Homotopietheorie konstruieren, die man für die Berechnung von $\mathbb{A}^1$-Homotopiegruppen einsetzen kann. Ein interessantes Beispiel ist die Sequenz

$$\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^\infty \vee \mathbb{P}^\infty \to \mathbb{P}^\infty,$$

wobei $\mathbb{P}^1$ und $\mathbb{P}^\infty$ die projektive Gerade bzw. der unendliche projektive Raum über einem beliebigen Körper sind. Aus dieser Fasersequenz erhält man eine neue Beschreibung der motivischen Fundamentalgruppe $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{P}^1)$.

Weitere Fasersequenzen, die mit den in der Arbeit vorgestellten Methoden konstruiert werden können, sind Faserbündel, deren Strukturgruppe entweder allgemeine lineare Gruppen GL_n oder symplektische Gruppen Sp_{2n} sind. Insbesondere induziert jedes projektive Bündel $E \to B$ eine Fasersequenz

$$\mathrm{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(E) \to \mathrm{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(B),$$

wobei $\mathrm{Sing}_\bullet^{\mathbb{A}^1}(X)$ ein Analogon des singulären Komplexes für topologische Räume ist, bei dem anstelle der Standard-Simplizes die affinen Räume $\mathbb{A}^n$ eingesetzt werden.

Im Gegensatz zur Topologie ist die Tatsache, daß Faserbündel auch Fasersequenzen induzieren, nicht einfach zu zeigen. Damit zum Beispiel projektive Bündel Fasersequenzen induzieren, ist es notwendig, daß alle projektiven Bündel auf $U \times \mathbb{A}^n$ bereits von U induziert sind, wobei U ein beliebiges glattes affines Schema ist. Dies folgt aus dem Serre-Problem, dessen Lösung durch Quillen und Suslin ein bedeutendes Ergebnis der kommutativen Algebra darstellt.

Aus bereits bekannten Lösungen für verschiedene Varianten des Serre-Problems kann man ebenso Beschreibungen für die Homotopiegruppen von klassischen Gruppen über Dedekind-Ringen ableiten. Dies erlaubt insbesondere eine Identifikation von $\mathbb{A}^1$-Homotopiegruppen von klassischen Gruppen mit unstabilen K-Gruppen, die in kondensierter Form Informationen über Matrizen über kommutativen Ringen enthalten.