

Peter Albers

On functoriality in Floer homology

Doctoral thesis. University of Leipzig, 2005.

Abstract

Floer theory associates to a symplectic manifold (M, ω) and a Hamiltonian function $H : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ the symplectic invariant $\text{HF}_*(H)$, known as Floer homology groups. We address the question of how to assign to a symplectic immersion $f : (M, \omega) \rightarrow (N, \sigma)$ an induced homomorphism between the Floer homology groups. We propose a new fundamental construction to solve this issue. In this thesis, we carry out all details of this construction for a certain class of symplectic manifolds, thereby demonstrating most features of our approach. Inspection of symplectic embeddings of the form $M \hookrightarrow M \times P$ already leads to new proofs of classic results concerning the geometry of Lagrangian submanifolds. Moreover, we establish a new mechanism for proving Lagrangian intersection results in symplectic manifolds of finite spectral capacity. As a sample result, we prove that every pair of simply connected Lagrangian submanifolds of $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$ intersect.

Peter Albers

On functoriality in Floer homology

Dissertation (englisch). Universität Leipzig, 2005.

Zusammenfassung

Floertheorie assoziiert zu einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) und einer Hamiltonschen Funktion $H : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ die symplektische Invariante $\text{HF}_*(H)$, die Floerhomologie-Gruppen. Wir untersuchen, wie einer symplektischen Immersion $f : (M, \omega) \rightarrow (N, \sigma)$ ein induzierter Homomorphismus zwischen den Floerhomologie-Gruppen zugeordnet werden kann. Hierzu kommt eine völlig neue Konstruktion zur Anwendung. In der vorliegenden Arbeit wird diese für eine große Klasse von symplektischen Mannigfaltigkeiten detailliert ausgearbeitet, dabei sind die neuartigen Merkmale dieses Zugangs klar erkennbar. Schon die Untersuchung von Einbettungen der Form $M \hookrightarrow M \times P$ ergibt neue Beweise klassischer Resultate über das Schnittverhalten von Lagrange-Untermannigfaltigkeiten. Darüber hinaus etablieren wir einen neuen Mechanismus, um Starrheitsresultate für Lagrange-Untermannigfaltigkeiten in symplektischen Mannigfaltigkeiten mit endlicher Spektralkapazität zu beweisen. Als eine Instanz dieses Mechanismus beweisen wir, daß sich je zwei einfach zusammenhängende Lagrange-Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$ schneiden.