Elliptic Regularity versus Rank-One Convexity

László Székelyhidi
Max-Planck-Institute für Mathematik in den Naturwissenschaften
Leipzig

Zusammenfassung

Trotz der langen Geschichte der Regularitätstheorie elliptischer Systeme beziehen sich die meisten Resultate auf monotone Systeme, und über Lösungen, die keine Minimierer sind, ist nur wenig bekannt. Basierend auf M. Gromovs *konvexer Integration* und L. Tartars *kompensierter Kompaktheit* haben S. Müller und V. Šverák Ende der Neunziger Jahre überraschende Gegenbeispiele zur Regularität gegeben: schwache Lösungen, die Lipschitz-stetig, aber nirgendwo C^1 sind. Das entsprechende 2×2 System ist die Euler-Lagrange-Gleichung eines Funktionals mit stark quasikonvexem Integranden. Unter diesen Bedingungen sind nach einem Resultat von L. C. Evans Minimierer partiell regulär.

Die Konstruktion besteht aus einer Erweiterung von konvexer Integration (auf Rang-1-Konvexität) und benutzt spezielle endliche Mengen von Matrizen, die keine Rang-1-Verbindung enthalten, aber eine nichttriviale Rang-1-konvexe Hülle haben. Die Relevanz von Rang-1-Verbindungen ist darin begründet, daß wegen der starken Elliptizität (der starken Legendre-Hadamard-Bedingung) keine laminaren, eindimensionalen, mit der Differentialgleichung verträglichen Oszillationen existieren und deshalb Mengen mit Rang-1-Verbindungen durch die Elliptizitätsbedingung automatisch ausgeschlossen sind.

In dieser Arbeit zeigen wir, daß partielle Regularität auch dann nicht erwartet werden kann, wenn das System von einem polykonvexem Integranden stammt:

Satz 1. *Sei Ω der Einheitsball in $\mathbb{R}^2$. Es existiert eine polykonvexe Funktion $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \mapsto \mathbb{R}$ mit beschränkten zweiten Ableitungen, so daß das dazu gehörige elliptische System*

$$\mathrm{div} DF(Du) = 0$$

schwache Lösungen hat, die Lipschitz-stetig, aber nirgendwo C^1 sind. Zusätzlich sind diese Lösungen schwache lokale Minimierer des Funktionals $\int_\Omega F(Du)\mathrm{d}x$.

Polykonvexität ist eine natürliche Strukturbedingung in mathematischen Modellen für Elastizität.

Um diese Methode weiter verallgemeinern zu können, so daß sie zu neuen Strukturbedingungen für (partielle) Regularität führt oder um zu zeigen, daß existierende Bedingungen wie die Quasimonotonizität scharf sind, analysieren wir die algebraisch-kombinatorischen Eigenschaften von Mengen von Matrizen, die keine Rang-1-Verbindungen, aber eine nichttriviale Rang-1-konvexe Hülle besitzen. Wir zeigen:

Satz 2. *Sei $K \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine kompakte Menge ohne Rang-1-Verbindungen die eine nichttriviale Rang-1-konvexe Hülle hat. Dann enthält K eine T_4-Konfiguration.*

T_4- und allgemeiner T_N-Konfigurationen sind die einfachsten Beispiele für Mengen von Matrizen mit nichttrivialer Hülle, die keine Rang-1-Verbindungen enthalten. Sie sind ein wesentlicher Bestandteil in der Konstruktion des Gegenbeispiels von Müller und Šverák und allgemeiner im Beweis von Satz 1.

Satz 2 steht im Gegensatz zu der Beobachtung, daß es für Rang-1-Konvexität keine endliche Carathéodory-Zahl gibt. Zusätzlich geben wir ein algebraisches Kriterium für die Existenz von T_N-Konfigurationen an.