

Zusammenfassung

Die Thematik der Arbeit ist in der Schuranalysis angesiedelt. Angeregt durch Bedürfnisse von Elektrotechnik und Signalübertragungstechnik entwickelte sich dieses mathematische Gebiet, welches Matrix- und Operatorversionen von Interpolations- und Momentenproblemen behandelt.

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit dem „ J -Potapovproblem“, einem Interpolationsproblem für Funktionen der J -Potapovklasse, welche in einer Umgebung von Null holomorph sind. Eine nähere Untersuchung dieser Funktionenklasse zeigt, dass deren Taylorkoeffizientenfolgen zur Klasse der J -Potapovfolgen gehören. Diese sind Ausgangspunkt für die Konstruktion von Matrixpolynomen, mit deren Hilfe sich die Lösungsmenge des J -Potapovproblems als gebrochenlineare Transformation darstellen lässt.

In Kapitel 1 werden zunächst J -Potapovfolgen und J -Potapovfunktion eingeführt sowie das J -Potapovproblem formuliert. Dabei werden wichtige Eigenschaften und Resultate vorgestellt sowie verdeutlicht, dass das J -Potapovproblem eine Verallgemeinerung des in der Literatur behandelten Schurproblems ist. Daraus entsteht die Zielstellung, wohlbekanntes, aus Schurfolgen gebildete, Matrixpolynome auf den J -Potapovfall zu übertragen.

Eine besondere Rolle in der Lösungsmenge des J -Potapovproblems spielt die zentrale J -Potapovfunktion, denn eine Quotientendarstellung zentraler J -Potapovfunktionen ermöglicht auch eine Analyse der allgemeinen Lösung. In Kapitel 2 erfolgt die Herleitung einer solchen Darstellung sowie die Untersuchung der damit verbundenen Folgen und Matrixpolynome. Dabei werden wichtige Identitäten und Beziehungen bewiesen, welche bei der Behandlung des J -Potapovproblems eine Schlüsselrolle spielen.

In Kapitel 3 erfolgt eine Verallgemeinerung der Arov-Krein-Matrixpolynome des Schurproblems auf die J -Potapovklasse. Dabei wird zunächst der nichtdegenerierte Fall untersucht, bevor eine Erweiterung der Ergebnisse auf den degenerierten Fall vorgenommen wird.

Ausgangspunkt für die Untersuchungen des vierten Kapitels ist die Beobachtung, dass mit den gegebenen Daten eines J -Potapovproblems ein spezielles Stein-Tripel und damit im nichtdegenerierten Fall ein J^\square ($:= \text{diag}(J, -J)$)-inneres Matrixpolynom vollen Ranges verbunden ist. Zu Beginn des Kapitels 4 folgen zunächst allgemeine Resultate über positiv hermitesche (J, r) -Stein-Tripel und die damit verbundene Matrixfunktion, bevor die Ergebnisse auf den nichtdegenerierten J -Potapovfall übertragen werden und der Begriff des Dubovojschen Matrixpolynoms geprägt wird. Ein wichtiges Hauptresultat von Kapitel 4 ist dabei die Faktorisierung des Dubovojschen Matrixpolynoms in lineare J^\square -innere Matrixpolynome vollen Ranges, welche im Gegensatz zum Schurfall nicht zwingend selbst wieder Dubovojsche Matrixpolynome sind.

Die in den Kapitel 2–4 erhaltenen Resultate stellen eine vollständige Verallgemeinerung der für den Schurfall aus der Literatur wohlbekanntes Resultate dar. Zudem wurden Resultate hergeleitet, die auch für den Schurfall neue Ergebnisse liefern. Dazu gehören insbesondere die genaue Gestalt und Eigenschaften der Taylorkoeffizientenfolge des Dubovojschen Matrixpolynoms sowie die explizite Darstellung der Schur-Dubovoj-Parameter aus den gegebenen Daten.

In Kapitel 5 wird die Lösungsmenge des J -Potapovproblems mittels der in den Kapiteln 2–4 konstruierten Matrixpolynome dargestellt. Hierbei wird besonders die Anwendung des

Dubovojschen Matrixpolynoms betrachtet. Weiterhin werden die durch die Lösungsmenge des J -Potapovproblems erzeugten Matrizenkreise untersucht und es erfolgt eine schrittweise Lösung des nichtdegenerierten J -Potapovproblems.

Zum Abschluss dieser Dissertation wird in Kapitel 6 die wohlbekanntete Charakterisierung der Zugehörigkeit einer Funktion zur Lösungsmenge des Schurproblems mittels fundamentaler Matrixungleichungen auf das J -Potapovproblem übertragen. Die Überlegungen aus Kapitel 4 führen auf fundamentale Matrixungleichungen für positiv hermitesche (J^\square, r) -Stein-Tripel. Es folgen verschiedene Lösungsdarstellungen dieser Matrixungleichungen, welche anschließend noch auf das J -Potapovproblem angewendet werden.

Im Verlauf der Arbeit werden Begriffe aus ausgewählten Bereichen der Matrizen­theorie und J -Theorie eingesetzt. Eine kurze Zusammenstellung hierzu befindet sich im Anhang.