Zusammenfassung

der Ergebnisse der Dissertationsschrift

Global Analytic Approach to Super Teichmüller Spaces

eingereicht am 13. April 2007

von Christoph Sachse

Das Ziel der Dissertation ist die Entwicklung eines globalen Ansatzes zur Konstruktion von Modulräumen superkonformer Strukturen. Konkret wird der Fall von komplexen $N = 1$ Superkurven und Super-Riemannschen Flächen untersucht, d.h. die untersuchten Objekte sind Superflächen mit einer geraden und einer ungeraden komplexen Dimension. Die Hauptidee dieses Ansatzes ist es, die global-analytische Konstruktion der klassischen Teichmüllerräume von Riemannschen Flächen, die von Tromba und Fischer entwickelt wurde, auf die Supergeometrie zu übertragen. Dies macht insb. die Entwicklung neuer Methoden zur Konstruktion und Untersuchung unendlich-dimensionaler Supermannigfaltigkeiten notwendig.

Nachdem im zweiten Kapitel die übliche Formulierung der Supergeometrie mittels geringter Räume zusammengefasst wurde, wird im dritten Kapitel, ausgehend von Ideen von V. Molotkov, ein neuer Zugang zur Supergeomtrie ausgearbeitet, der sich auf die kategorie-theoretischen Eigenschaften, insb. den vom Yoneda-Lemma gegebenen "functor of points" stützt. Dieser Ansatz ist für dieses Projekt unverzichtbar, weil er die Möglichkeit bietet, auch unendlich-dimensionale Supermannigfaltigkeiten explizit zu konstruieren.

Im vierten Kapitel wird die Definition der Super-Riemannschen Flächen (SRS) detailliert diskutiert. In der Physik, wo SRS zum ersten Mal eingführt wurden, wird oft von einem eindeutigen Super-Analogon für Riemannsche Flächen ausgegangen. Da es aber unendlich viele Typen superkonformer Strukturen gibt, ist dies vom mathematischen Standpunkt nur ein Spezialfall, der lediglich aufgrund weiterer spezieller Eigenschaften, die für superkonforme Feldtheorien notwendig sind, in der Physik (insb. Stringtheorie) benutzt wird. Wir beschränken uns im weiteren jedoch auf diese spezielle superkonforme Struktur, die in der Physik als $N = 1$-SRS bezeichnet wird, da für sie die interessantesten Anwendungen existieren und sie bislang die am besten untersuchte ist. Eine wichtige Eigenschaft von $N = 1$-SRS, die sie von gewöhnlichen Riemannschen Flächen unterscheiden, ist, dass eine superkonforme Struktur eine komplexe Struktur impliziert, aber spezieller ist: sie verlangt zusätzlich die Existenz einer Distribution vom Rang $0|1$ im Tangentialbündel.

Das fünfte Kapitel besteht aus der expliziten Konstruktion einer komplexen Fréchet-Supermannigfaltigkeit aller fast komplexen Strukturen auf einer gegebenen fast komplexen Supermannigfaltigkeit. Im sechsten Kapitel werden die Bedingungen untersucht, unter denen eine fast komplexe Struktur auf einer glatten Superfläche der Dimension $2|2$ integrabel ist. Es wird gezeigt, dass im Gegensatz zu zwei geraden Dimensionen hier auch nicht integrable Strukturen vorkommen können.

Das siebte Kapitel enthält ein weiteres Hauptergebnis dieser Arbeit: eine explizite Konstruktion der Diffeomorphismen-Supergruppe einer endlichdimensionalen Supermannigfaltigkeit. Dieses Problem kann nur mittels des kategorischen Zugangs angegangen werden, es war bislang keine (auch nur partielle) solche Konstruktion in der Literatur bekannt.

Im letzten Kapitel werden die zuvor erhaltenen Resultate auf das Teichmüllerproblem der $N = 1$-SRS angewandt. Es werden zunächst die nichttrivialen Deformationen integrabler fast komplexer und superkonformer Strukturen charaktersiert. Die letzteren bilden einen Unterraum der ersteren. Dann wird gezeigt, dass es, im Gegensatz zur Situation in der gewöhnlichen Teichmüllertheorie, keinen Slice für die Wirkung der Diffeomorphismen-Supergruppe auf die Supermannigfaltigkeiten dieser Strukturen gibt. D.h., es existiert keine universelle Familie von komplexen $1|1$-dimensionalen Supermannigfaltigkeiten und auch nicht von $N = 1$-SRS. Es wird auch gezeigt, dass die verbleibenden Automorphismengruppen, die die Konstruktion universeller Familien verhindern, isomorph zu $\mathbb{C}^\times$ (im Fall der komplexen Strukturen) bzw. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (für $N = 1$-SRS) sind. Dies bestätigt zuvor bekannte Resultate von Vaintrob und Rothstein/LeBrun aus der Deformationstheorie.