

ZUR EISENBUD-GOTO-VERMUTUNG FÜR AFFINE HALBGRUPPENRINGE

ABSTRACT

MAX JOACHIM NITSCHKE

Seien K ein Körper und B eine homogene affine Halbgruppe. Die Castelnuovo-Mumford-Regularität (kurz Regularität) $\text{reg } K[B]$ des zugehörigen Halbgruppenringes ist eine universelle Invariante für die Komplexität von $K[B]$, zum Beispiel stimmt die Hilbertfunktion von $K[B]$ mit dem Hilbertpolynom für Funktionswerte größer als $\text{reg } K[B]$ überein. Es ist daher von großem Interesse, gute Abschätzungen für diese Invariante zu haben. Die Eisenbud-Goto-Vermutung ist eine allgemeine Abschätzung für die Regularität von gewissen standard-graduierten K -Algebren. Im Spezialfall von (homogenen) affinen Halbgruppenringen kann sie wie folgt formuliert werden: Ist K ein beliebiger Körper und B eine homogene affine Halbgruppe, dann gilt

$$\text{reg } K[B] \leq \text{deg } K[B] - \text{codim } K[B];$$

$\text{deg } K[B]$ bezeichnet den Grad von $K[B]$, $\text{codim } K[B]$ die Kodimension und $\text{dim } K[B]$ die Dimension. Diese Ungleichung gilt für verschiedene Fälle, zum Beispiel für $\text{dim } K[B] = 2$ nach Gruson-Lazarsfeld-Peskine oder im Cohen-Macaulay-Fall nach Treger. Dennoch ist die Eisenbud-Goto-Vermutung für affine Halbgruppenringe selbst im simplizialen Fall weitgehend offen.

In dieser Arbeit diskutieren wir zunächst einen neuartigen Algorithmus für die Berechnung von $\text{reg } K[B]$. Mit Hilfe dieses Algorithmus bestätigen wir durch einen Computerbeweis die Eisenbud-Goto-Vermutung für eine Beispielklasse von gut 3 Millionen affinen Halbgruppenringen über \mathbb{Q} mit $3 \leq \text{dim } \mathbb{Q}[B] \leq 5$. Wir bemerken, dass dieser Beweis mit den herkömmlichen Berechnungsmethoden für $\text{reg } \mathbb{Q}[B]$ (praktisch) nicht möglich gewesen wäre. Diese beiden Resultate stammen aus einer Gemeinschaftsarbeit mit David Eisenbud und Janko Böhm.

Des Weiteren beweisen wir die Eisenbud-Goto-Vermutung für seminormale simpliziale affine Halbgruppenringe. Wir beweisen auch, dass die Regularität dieser K -Algebren durch $\text{dim } K[B] - 1$ beschränkt ist. Darüber hinaus berechnen wir explizit die Regularität von vollen Veronese Ringen.

Zusätzlich zeigen wir die Eisenbud-Goto-Vermutung für eine weitere neue Klasse von simplizialen affinen Halbgruppenringen, nämlich für den Fall, dass eines der monomialen Ideale in der kanonischen Zerlegung von $K[B]$ über $K[A]$, welches die Regularität von $K[B]$ bestimmt, minimal von einem oder zwei Monomen erzeugt wird; A ist das Untermonoid von B , welches von minimalen Erzeugern von B erzeugt wird, die linear unabhängig sind.

Seit über 10 Jahren besteht die Frage nach einem rein kombinatorischen Beweis der Eisenbud-Goto-Vermutung im Fall $\text{dim } K[B] = 2$. Diese Frage beantworten wir vollständig in dieser Dissertation – wir geben den ersten kombinatorischen Beweis der Eisenbud-Goto-Vermutung im zwei-dimensionalen-Fall.