Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den finiten matriziellen Momentenprobleme der folgenden beiden Typen:

- $P[\Omega; (s_j)_{j=0}^m, =]$: Seien $\Omega \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$ und m eine nichtnegative ganze Zahl sowie $(s_j)_{j=0}^m$ eine Folge komplexer $q \times q$-Matrizen. Dann ist eine Beschreibung der Menge $\mathcal{M}_{\geqslant}^q[\Omega; (s_j)_{j=0}^m, =]$ aller auf der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}_\Omega$ über Ω definierten nichtnegativ hermiteschen $q \times q$-Maße σ gesucht, für welche für jede ganze Zahl j mit $0 \leqslant j \leqslant m$ das Integral $\int_\Omega t^j \sigma(dt)$ existiert und die Beziehung $\int_\Omega t^j \sigma(dt) = s_j$ besteht.

- $P[\Omega; (s_j)_{j=0}^m, \leqslant]$: Seien $\Omega \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$ und m eine nichtnegative ganze Zahl sowie $(s_j)_{j=0}^m$ eine Folge komplexer $q \times q$-Matrizen. Dann ist die Beschreibung der Menge $\mathcal{M}_{\geqslant}^q[\Omega; (s_j)_{j=0}^m, \leqslant]$ aller auf der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}_\Omega$ über Ω definierten nichtnegativ hermiteschen $q \times q$-Maße σ gesucht, für welche für jede ganze Zahl j mit $0 \leqslant j \leqslant m$ das Integral $\int_\Omega t^j \sigma(dt)$ existiert und die Matrix $s_m - \int_\Omega t^m \sigma(dt)$ nichtnegativ hermitesch ist sowie im Fall $m > 0$ darüber hinaus für jede ganze Zahl j mit $0 \leqslant j \leqslant m-1$ die Beziehung $\int_\Omega t^j \sigma(dt) = s_j$ besteht.

In der vorliegenden Arbeit wird hauptsächlich der Fall $\Omega = [\alpha, +\infty)$ diskutiert, wobei α eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist, und dabei insbesondere mit $P[[\alpha, +\infty); (s_j)_{j=0}^m, \leqslant]$ eine Verallgemeinerung des matriziellen Stieltjesschen Potenzmomentenproblems behandelt. Die Lösbarkeit der matriziellen Potenzmomentenprobleme des zuletzt genannten Typs ist unmittelbar damit verbunden, dass gewisse aus den vorgegebenen Ausgangsdaten gebildete Block-Hankel-Matrizen nichtnegativ hermitesch sind. Sind κ eine nichtnegative ganze Zahl und eine Folge $(s_j)_{j=0}^\kappa$ komplexer $q \times q$-Matrizen gegeben, so bezeichne für jede ganze Zahl n mit $0 \leqslant 2n \leqslant \kappa$ dann $H_n := (s_{j+k})_{j,k=0}^n$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leqslant 2n+1 \leqslant \kappa$ weiterhin $K_n := (s_{j+k+1})_{j,k=0}^n$. Das Problem $P[[\alpha, +\infty); (s_j)_{j=0}^{2n+1}, \leqslant]$ ist genau dann lösbar, wenn die Block-Hankel-Matrizen H_n und $-\alpha H_n + K_n$ beide nichtnegativ hermitesch sind.

Die vorliegende Arbeit gibt unter der Voraussetzung, dass eine Lösung existiert, eine Parametrisierung der Lösungsmenge $\mathcal{M}_{\geqslant}^q[\Omega; (s_j)_{j=0}^m, \leqslant]$ an. Dies geschieht nicht direkt, sondern dadurch, dass das Momentenproblem $P[[\alpha, +\infty); (s_j)_{j=0}^m, \leqslant]$ über eine spezielle Integraltransformation in ein äquivalentes Interpolationsproblem $S[[\alpha, +\infty); (s_j)_{j=0}^m, \leqslant]$ für eine spezielle Klasse holomorpher Matrixfunktionen überführt wird. Diese Integraltransformation ergibt sich durch eine Modifizierung einer Matrixversion eines berühmten, auf R. Nevanlinna zurückgehenden Theorems.
Der erste Schritt des dargestellten Vorgehens liegt in der geeigneten Wahl spezieller verallgemeinerter Inversen der Matrizen H_n und $-\alpha H_n + K_n$. Diese verallgemeinerten Inversen spielen eine Schlüsselrolle bei der Konstruktion der Matrixfunktionen, mit denen über eine gebrochen-lineare Transformationsdarstellung eine Parametrisierung der

Lösungsmenge des studierten Momentenproblems möglich wird.
Weiterhin wird gezeigt, dass die Lösungsmenge des Problems $S[[\alpha, +\infty); (s_j)_{j=0}^{m}, \leqslant]$ mit der Lösungsmenge eines Systems Potapovscher Fundamentaler Matrixungleichungen übereinstimmt, sodass dann das System dieser Ungleichungen betrachtet werden kann, um das Momentenproblem zu diskutieren. Diese auf V. P. Potapov zurückgehende Idee lässt sich im Wesentlichen wie im bekannten Spezialfall $\alpha = 0$ umsetzen, erfordert jedoch mehr Aufwand.
Eine Schlüsselrolle bei dem dargestellten Vorgehen besteht in der Konstruktion spezieller Matrixpolynome aus den gegebenen Daten, der Berechnung der zugehörigen $\tilde{J}_q$-Formen, wobei $\tilde{J}_q$ die für das betrachtete Momentenproblem relevante Signaturmatrix ist, und der Bereitstellung von Identitäten für diese Matrixfunktionen.
Ein weiteres Anliegen dieser Arbeit ist die Bereitstellung spezieller Paare meromorpher Matrixfunktionen, sogenannten Stieltjes-Paaren, die die Rolle der freien Parameter bei der Darstellung der Lösungsmenge des betrachteten finiten matriziellen Stieltjesschen Potenzmomentenproblems spielen. Damit wird es möglich eine Parametrisierung der Menge $S[[\alpha, +\infty); (s_j)_{j=0}^{m}, \leqslant]$ sowohl im nichtdegenerierten wie auch im degenerierten Fall herzuleiten.