Dissertation von Maike Löhndorf
Titel: *Effiziente Behandlung von Integraloperatoren mit $\mathcal{H}^2$-Matrizen variabler Ordnung*

Zusammenfassung: Die Diskretisierung von Randintergraloperatoren durch das Galerkin-Verfahren führt im allgemeinen zu vollbesetzen Matrizen, deren Berechnung mindestens einen Aufwand erfordert, der quadratisch mit der Problemgröße n wächst. Das liegt im wesentlichen daran, daß die Kernfunktion, die dem Operator zugrunde liegt, nicht lokal ist.

Eine Reihe von Verfahren wurden bereits vorgeschlagen und untersucht, die eine Approximation der Systemmatrix mit einem Aufwand konstruieren, der sich wie $n\log(n)^\kappa$, verhält, wobei $\kappa = 1, 2, \ldots$ von Verfahren abhängt. Einige nutzen dazu endliche degenerierte Entwicklungen der Kernfunktion. Dazu gehören das Multipol-Verfahren, die Panel-Clustering-Methode und die hierarchischen Matrizen ($\mathcal{H}$-Matrizen).

Eine Weiterentwicklung der $\mathcal{H}$-Matrizen sind die $\mathcal{H}^2$-Matrizen, die effizienter im Speicherbedarf und im Aufwand sind. In dieser Arbeit wird theoretisch und numerisch für eine Klasse von Integraloperatoren gezeigt, daß eine Genauigkeit $\mathcal{O}(h)$ mit Aufwand $\mathcal{O}(n)$ erreicht werden kann, wobei h den Diskretisierungsparameter bezeichne. Diese Klasse enthält unter andereren den Doppelschichtoperator der Laplacegleichung. Für die Praxis bedeutsam ist die Tatsache, daß die vorgeschlagene Methode nur Punktauswertungen des Integralkerns benötigt; Entwicklungen des Kerns in Taylorpolynome oder angepaßte Funktionensysteme, wie bei anderen Verfahren notwendig, entfallen.

In dieser Arbeit werden $\mathcal{H}^2$-Matrizen untersucht, die auf Polynominterpolation der Kernfunktion basieren. Diese Wahl der Kernentwicklung erlaubt es weitgehend, Blackbox-Algorithmen zu entwerfen, da nur Punktauswertungen des Kerns programmiert werden müssen.

Das $\mathcal{H}^2$-Format wird definiert und die Algorithmen zur Konstruktion einer $\mathcal{H}^2$-Matrix werden detaillert beschrieben. Für den darin verwendeten Reinterpolationsprozeß wird sowohl Stabilität gezeigt als auch L^∞-Fehlerschranken angegeben. Daraus werden Fehlerabschätzungen für den gesamten Operator hergeleitet. Zum Beipiel gilt für den Doppelschichtoperator der Laplace-Gleichung auf glatten Gebieten mit quasi-uniformen Gittern zur Schrittweite h

$$|e(u,v)| := |\langle(\mathbf{K} - \tilde{\mathbf{K}})\hat{u}, \hat{v}\rangle_2| \leq Ch\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$

für alle u, v des Finite-Elemente-Ansatzraums, wobei mit $\hat{u}, \hat{v}$ die Koeffizienten in der Basisdarstellung bezeichnet seien.

Die Standardverteilung der Grade liefert für den Doppelschichtoperator auf Gebieten mit Ecken oder Kanten nicht die gewünschte Konvergenz. Deshalb schlagen wir eine an solche Gebiete angepaßte Gradverteilung vor. Wir können zum einen zeigen, daß dadurch Konvergenz erreicht wird. Zum anderen geben wir Voraussetzungen an, die zu optimaler Komplexität führen, und zeigen für eine große Klasse von Problemen, daß sie diese Voraussetzungen erfüllt.

Es werden die Ergebnisse numerischer Experimente in zwei und drei Dimensionen präsentiert, die unsere Theorie bestätigen.

Die Programmbibliothek *libbem* dient zur Diskretisierung von Randintegralgleichungen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ihr unter anderem die $\mathcal{H}^2$-Matrix-Technik hinzugefügt. Wir beschreiben kurz die Bibliothek und widmen uns etwas ausführlicher der Darstellung der Erweiterung.