In der vorliegenden Dissertation behandeln wir spezielle matrizielle Potenzmomentenprobleme. Unter einem matriziellen Potenzmomentenproblem versteht man folgendes: Seien κ eine nichtnegative ganze Zahl oder unendlich, Ω eine nichtleere Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $(s_j)_{j=0}^{\kappa}$ eine Folge von komplexen $q \times q$-Matrizen. Dann sind alle nichtnegativ hermiteschen $q \times q$-Maße μ auf $(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega)$ gesucht, deren erste κ Potenzmomente $s_j^{(\mu)} := \int_\Omega t^j \, \mu(dt)$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq j \leq \kappa$ existieren und mit der vorgegebenen Matrizenfolge übereinstimmen, d.h. es gilt $s_j^{(\mu)} = s_j$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq j \leq \kappa$. Wir werden speziell finite Potenzmomentenprobleme betrachten, bei denen die Bedingung an das höchste Moment durch eine Ungleichung ersetzt wird.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir als Grundmenge Ω die Intervalle $[\alpha, \infty)$ bzw. $(-\infty, \alpha]$ mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$. Das zugrundeliegende Potenzmomentenproblem wird dann auch als rechtsseitiges bzw. linksseitiges α-Stieltjes Momentenproblem bezeichnet. Es stellt sich heraus, dass die Menge der gesuchten Maße genau dann nichtleer ist, wenn gewisse aus der gegebenen Matrizenfolge $(s_j)_{j=0}^{\kappa}$ konstruierte Block-Hankel-Matrizen nichtnegativ hermitesch sind. Es handelt sich hierbei um die Matrizen $H_n := (s_{j+k})_{j,k=0}^{n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq 2n \leq \kappa$ und $H_{\alpha \triangleright n} := (-\alpha s_{j+k} + s_{j+k+1})_{j,k=0}^{n}$ bzw. $H_{\alpha \triangleleft n} := (\alpha s_{j+k} - s_{j+k+1})_{j,k=0}^{n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq 2n+1 \leq \kappa$. Sind diese Matrizen nichtnegativ hermitesch, so heißt $(s_j)_{j=0}^{\kappa}$ rechtsseitig bzw. linksseitig α-Stieltjes-nichtnegativ definit. Wir widmen uns in dieser Arbeit vorwiegend dem vollständig nichtdegenerierten Fall, also wenn $(s_j)_{j=0}^{\kappa}$ rechtsseitig bzw. linksseitig α-Stieltjes-positiv definit ist, d.h. wenn die zugehörigen Block-Hankel-Matrizen sogar positiv hermitesch sind.

Im Verlauf der Arbeit werden wir mehrere Parametrisierungen der vorgegebenen Matrizenfolge einführen, untersuchen und untereinander in Verbindung bringen. Speziell befassen wir uns mit der α-Stieltjes-Parametrisierung, der kanonischen Hankel-Parametrisierung, dem Favard-Paar, der α-Dyukarev-Stieltjes-Parametrisierung, dem α-Dyukarev-Quadrupel und dem α-Stieltjes-Quadrupel.

Wir werden das betrachtete Potenzmomentenproblem mithilfe der sogenannten Stieltjes-Transformation in ein äquivalentes Interpolationsproblem überführen, indem wir nun spezielle holomorphe $q \times q$-Matrixfunktionen suchen, deren Stieltjes-Maße das ursprüngliche Potenzmomentenproblem lösen. Durch die Heranziehung des Systems von Potapovschen fundamentalen Matrixungleichungen, dessen Lösung auch eine Lösung für das neu erhaltene Interpolationsproblem darstellt, können wir eine vollständige Beschreibung der Lösungsmenge in Form einer gebrochen linearen Transformation vornehmen, deren erzeugende Matrixfunktion ein aus dem α-Dyukarev-Quadrupel gebildetes $2q \times 2q$-Matrixpolynom, auch Resolventenmatrix genannt, ist und als deren Parametermenge eine spezielle Klasse von geordneten Paaren von meromorphen $q \times q$-Matrixfunktionen, den sogenannten Stieltjes-Paaren, fungiert. Hierbei spielt die Signaturmatrix $\widetilde{J}_q$ eine wichtige Schlüsselrolle.

Weiterhin erfolgt eine ausführliche Diskussion zweier in gewissem Sinne extremaler Lösungen des umformulierten Potenzmomentenproblems, eine multiplikative Zerlegung der Resolventenmatrix in lineare Matrixpolynome, wodurch eine Verbindung zu einem möglichen Algorithmus vom Schur-Typ geschaffen wird, eine alternative Beschreibung der Lösungsmenge mit einer Teilmenge von $q \times q$-Schurfunktionen als Parametermenge und eine Betrachtung einiger Zusammenhänge zum Hausdorffschen Momentenproblem.