

Komprimierte Entscheidungsprobleme in Gruppen

Dipl.-Math. Niko Haubold
Dissertation

Zusammenfassung

Wir beschäftigen uns mit Problemen der algorithmischen Gruppentheorie und untersuchen dabei die Komplexität von komprimierten Versionen des Wortproblems und des Konjugationsproblems für endlich erzeugte Gruppen.

Das Wortproblem fragt für eine feste, endlich erzeugte Gruppe ob ein gegebenes Wort über der Erzeugermenge das neutrale Element der Gruppe repräsentiert. Wir betrachten das gegebene Wort jedoch in einer komprimierten Form, als Straight-line Program (SLP) und untersuchen die Komplexität dieses Problems, das wir 'komprimiertes Wortproblem' nennen. SLPs sind kontextfreie Grammatiken, die genau einen String erzeugen. Die Eingabegröße ist dabei stets die Größe des gegebenen SLPs. Eine Hauptmotivation ist dabei, dass für eine feste endlich erzeugte Gruppe das Wortproblem ihrer Automorphismengruppe durch eine Turingmaschine in Polynomialzeit auf das komprimierte Wortproblem der Gruppe selbst reduzierbar ist.

Wir untersuchen das komprimierte Wortproblem für die verbreiteten Gruppenerweiterungen HNN-Erweiterungen (amalgamierte Produkte und Graphprodukte) und können zeigen, dass sich Instanzen des komprimierten Wortproblems von einer Turingmaschine in Polynomialzeit auf Instanzen des komprimierten Wortproblems der Basisgruppe (respektive Basisgruppen und Knotengruppen) reduzieren lassen. Weiterhin zeigen wir, dass das komprimierte Wortproblem für endlich erzeugte nilpotente Gruppen von einer Turingmaschine in Polynomialzeit entscheidbar ist.

Wir betrachten außerdem eine komprimierte Variante des Konjugationsproblems. Das unkomprimierte Konjugationsproblem fragt für zwei gegebene Wörter über den Erzeugern einer festen endlich erzeugten Gruppe, ob sie in dieser Gruppe konjugiert sind. Beim komprimierten Konjugationsproblem besteht die Eingabe aus zwei SLPs und es wird gefragt, ob die beiden Wörter die von den SLPs erzeugt werden in der Gruppe konjugierte Elemente präsentieren. Wir konnten zeigen, dass sich das komprimierte Konjugationsproblem für Graphgruppen in Polynomialzeit entscheiden lässt.

Weiterhin haben wir das Wortproblem der äußeren Automorphismengruppen von Graphprodukten endlich erzeugter Gruppen untersucht. Durch den engen Zusammenhang des komprimierten Konjugationsproblems einer Gruppe mit dem Wortproblem der äußeren Automorphismengruppe konnten wir zeigen, dass sich das Wortproblem der äußeren Automorphismengruppe eines Graphprodukts von endlich erzeugten Gruppen durch eine Turingmaschine in Polynomialzeit auf Instanzen von simultanen komprimierten Konjugationsproblemen der Knotengruppen und Instanzen von komprimierten Wortproblemen der Knotengruppen reduzieren lässt.

Als Anwendung gelten obige Resultate auch für Coxetergruppen und Graphgruppen, da beide spezielle Graphprodukte sind. So folgt beispielsweise, dass das komprimierte Wortproblem einer Coxetergruppe in Polynomialzeit entscheidbar ist.