Bibliographische Beschreibung

Sebastian Bogner

Der Schur–Potapov–Algorithmus für Folgen aus $\mathbb{C}^{p\times q}$

Universität Leipzig, Diss., 199 S., 231 Lit.

Referat:

Die vorliegende Dissertation ist im Umfeld des matriziellen Schurproblems angesiedelt. Dieses klassische funktionentheoretische Interpolationsproblem wurde erstmals von J.L. Geronimus explizit behandelt, wobei er sich wesentlich auf die von I. Schur in einer fundamentalen Arbeit aus dem Jahr 1917 entwickelte Methodik zur Untersuchung der Klasse $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ (in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ durch 1 beschränkte holomorphe Funktionen) stützte. Zur Beschreibung der Taylorkoeffizientenfolgen von Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ konstruierte Schur einen tiefsinnigen Algorithmus, mit dem sich eine Parametrisierung der generischen Vertreter von $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ durch Folgen aus $\mathbb{D}$ realisieren läßt.

Die Zugänge zu matriziellen und operatoriellen Versionen klassischer Interpolations- und Momentenprobleme, die eine geeignete Adaptation des klassischen Schuralgorithmus enthalten, werden nun unter dem Oberbegriff „Schuranalysis“ zusammengefaßt.

Am Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit steht ein auf einer Synthese verschiedener Konzepte basierender, von B. Fritzsche und B. Kirstein entwickelter Zugang zum matriziellen Schurproblem. Zielstellung ist, einen Zugang zum nichtdegenerierten matriziellen Schurproblem sowie zur Charakterisierung von matriziellen Schurfunktionen über ihre Taylorkoeffizientenfolgen zu entwickeln, welcher vollständig im Zeichen der Schurschen Vorgehensweise steht, also nicht auf die Wechselbeziehungen der matriziellen Schur– und Carathéodoryfunktionen Bezug nimmt.

Kapitel 1 der Arbeit ist einer detaillierten Diskussion des Schur–Potapov–Algorithmus für endliche und unendliche Matrizenfolgen gewidmet. Die Charakterisierung der uneingeschränkten Durchführbarkeit des Schur–Potapov–Algorithmus ergibt, daß dies genau für strenge Schurfolgen erfüllt ist. Damit gelingt eine Parametrisierung strenger $p \times q$–Schurfolgen durch eine Folge aus $\mathbb{D}_{p\times q} = \{E \in \mathbb{C}^{p\times q} : I_p - EE^* \geq 0_{p\times p}\}$ (deren Schur–Potapov–Parameterfolge). Umgekehrt ist jede Folge aus $\mathbb{D}_{p\times q}$ auch Schur–Potapov–Parameterfolge genau einer strengen $p \times q$–Schurfolge. Durch Vergleich mit bekannten Darstellungsformeln für die Elemente strenger $p \times q$–Schurfolgen werden Beziehungen zwischen den beteiligten Objekten hergeleitet.

Kapitel 2 ist matriziellen Schurfunktionen gewidmet. Die zwei Teile des Elementarschritts des SP–Algorithmus für $p \times q$–Schurfunktionen (Schurfunktionen unter speziellen gebrochenlinearen Transformationen sowie die matrizielle Version des Lemmas von Schwarz) werden vorbereitet.

Kapitel 3 beinhaltet die Behandlung des Schur–Potapov–Algorithmus für Funktionen der Klasse $\mathcal{S}_{p\times q}(\mathbb{D})$ vor dem Hintergrund des in Kapitel 1 untersuchten Schur–Potapov–Algorithmus für Folgen. Allein mit Mitteln einer im Geist von I. Schur angelegten Herangehensweise gelingt eine vollständige Charakterisierung der Taylorkoeffizientenstruktur einer $p \times q$–Schurfunktion sowie eine alternative Herleitung der von B. Fritzsche und B. Kirstein konstruierten Darstellung der Lösungsmenge eines nichtdegenerierten matriziellen Schurproblems. In Abschnitt 3.6 wird für diese ein neuer Zugang zu einer expliziten Darstellung in den Ausgangsdaten (über die Resolventenmatrix von Arov–Krein) gewonnen. Desweiteren wird die Konstruktion von $p \times q$–Schurfunktionen zu vorgegebener Schur–Potapov–Parameterfolge $(E_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ behandelt. Abschnitt 3.8 beinhaltet eine auf den Matrixfall vorgenommene vollständige Übertragung Schurscher Resultate zum Einfluß der Eigenschaften der Folge $(E_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ auf die der zugehörigen $p \times q$–Schurfunktion.

In Anhang A erfolgt eine Zusammenstellung von Fakten über verschiedene zentrale Objekte der Arbeit, wie z.B. Matrizenkreise, Abschnittsmatrizen, $p \times q$–Schurfolgen, gebrochenlineare Transformationen von Matrizen, J–Eigenschaften von Matrizen, Schursche Matrixpolynome u.a.