Nachklausur zur Vorlesung Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

am 30.5.2015, Zeit: 120 Minuten

Nachname ....

Prüflingsnummer ....

Unterschrift ....

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Σ
erreichbare Punkte	6	11	10	10	9	14	60
erreichte Punkte							

Es sind keine Hilfsmittel (außer Stifte und Lineal) erlaubt.

Mit 30 Punkten haben Sie bestanden.

Wenn nicht anders angegeben, sind alle Aussagen zu begründen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

a) (1 Punkt) Vereinfachen Sie so weit wie möglich: $\sqrt{\frac{1}{4}} - 0,5$

b) (1 Punkt) Vereinfachen Sie so weit wie möglich: $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}}$

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel der drei Zahlen 1 ; 8 ; 27 !

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$!

Aufgabe 2 Die Anzahl der Zugriffe auf eine Internetseite hat sich wie folgt entwickelt:

Monat	Anzahl
Apr. 2014	21.000.000
Mai 2014	55.000.000
Jun. 2014	81.000.000
Jul. 2014	170.000.000
Aug. 2014	101.000.000
Sep. 2014	84.000.000
Okt. 2014	109.000.000
Nov. 2014	95.000.000
Dez. 2014	85.000.000

Bestimmen Sie approximativ die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate der Anzahl der Zugriffe für die folgenden Zeiträume:

a) von April 2014 bis Juli 2014

b) von Juli 2014 bis September 2014

c) von September 2014 bis Dezember 2014

d) von April 2014 bis Dezember 2014

Geben Sie die Approximation der Rate in der Form $x\%$ an, wobei x auf Zehner gerundet ist! (Mögliche Antworten sind somit beispielsweise 10% oder 20%, während beispielsweise 15% keine mögliche Antwort ist.)

Aufgabe 3

a) (8 Punkte) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)} = \frac{n}{2n+1} \ .$$

b) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Summe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}$$

existiert, und geben Sie gegebenenfalls an, wie diese lautet!

Aufgabe 4 Betrachten Sie die wie folgt definierte Funktion:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$$

a) (5 Punkte) Bestimmen Sie für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(2)| \leq \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 2| \leq \delta$!

b) (5 Punkte) Bestimmen Sie für jedes $S \in \mathbb{R}$ ein $X \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq S$ für alle $x \geq X$!

In a) ist nicht nur die Angabe eines korrekten δ relevant, sondern auch eine nachvollziehbare Argumentation, dass das angegebene δ die gewünschte Eigenschaft hat. Analoges gilt für b).

Aufgabe 5 Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen jeweils die Ableitung! Vereinfachen Sie hierbei so weit wie möglich!

a) $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$

b) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x-2}$

d) $f_4 : x \mapsto (x+1) \cdot 2^{x+1}$

Hierbei sind die Definitionsbereiche die jeweils maximal möglichen mit den gegebenen Vorschriften. (Die Definitionsbereiche sind nicht wichtig für die Aufgabe.)

Aufgabe 6 Betrachten Sie die wie folgt definierte Funktion:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto -3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 24x - 24$$

a) (1 Punkte) Geben Sie die Grenzwerte für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ an!

b) (9 Punkte) Bestimmen Sie die lokalen und die globalen Maximalstellen und Minimalstellen von f sowie die entsprechenden Funktionswerte!

c) (1 Punkt) Geben Sie die maximalen Bereiche an, auf denen die Funktion monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend ist!

d) (1 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Funktion (mindestens) eine Nullstelle hat!

e) (1 Punkt) Entscheiden Sie, ob die Funktion surjektiv ist!

f) (1 Punkt) Entscheiden Sie, ob die Ableitung der Funktion injektiv ist!

Hinweis. Die Ableitung von f hat (mindestens) eine ganzzahlige Nullstelle.