Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER
MUSTERLÖSUNG UND HINWEISE
ZU ÜBUNGSBLATT NR. 8, AUFGABEN 1 und 2

Hinweise sind *kursiv* gesetzt.

Aufgabe 1 Bestimmen sie für die folgenden rationalen Funktionen jeweils die Polstellen, die entsprechenden rechts- und linksseitigen Grenzwerte und die Grenzwerte "im Unendlichen"! Entscheiden Sie auch, ob die (beidseitigen) Grenzwerte an den Polstellen exisistieren!

$$a)\ \frac{1}{x-1} \qquad b)\ \frac{x^2-1}{x-1} \qquad c)\ \frac{-1}{x^2-2x+1}$$

$$d)\ \frac{x^2+x+2}{x^2+x-2} \qquad e)\ \frac{1}{x^3+x^2} \qquad f)\ \frac{5x^4}{x^4-2x^3+x^2}$$

Zunächst ein Hinweis: Eine Polstelle *ist eine Lücke im Definitionsbereich, für die die rechts- und linksseitigen Grenzwerte existieren und gleich* ∞ *oder* $-\infty$ *sind.*

Der erste Schritt bei Lösung der Aufgaben besteht darin, die Nullstellen des Nenners zu bestimmen. Dann muss man schauen, welche dieser Nullstellen auch Nullstellen des Zählers sind.

Zur Bestimmung der Grenzwerte wird im Folgenden wird ein halb-intuitiver Zugang gewählt, der aber schon begründet ist.

a) Es gibt eine Polstelle bei $x = 1$. Es ist $\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} =\text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} =\text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = \infty$. Somit existiert der zweiseitige Grenzwert an $x = 1$ nicht.
Außerdem $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{x-1} = 0$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1}{x-1} = 0$.

b) Es ist für $x \neq 1$: $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$. Aus diesem Grund gibt es hier keine Polstellen (sondern nur eine "Lücke" bei $x = -1$ im Definitionsbereich. Man kann hier von einer *hebbaren Definitionslücke* sprechen. Ich habe gehört, dass dies manche Leute auch eine *hebbare Polstelle* nennen. Das ist aber in meinen Augen nicht gut.)
Es ist dann (natürlich) $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = -\infty$.

c) Es ist $\frac{-1}{x^2-2x+1} = \frac{-1}{(x-1)^2}$. Es gibt also eine Polstelle bei $x = 1$. Da der Nenner immer positiv ist, ist $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$.
Außerdem ist $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-1}{x^2-2x+1} = 0$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{-1}{x^2-2x+1} = 0$.

d) Es ist $\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x-2} = \dfrac{x^2+x+2}{(x-1)(x+2)}$ und 1 und -2 sind keine Nullstellen des Zählers. Somit liegen bei $x=-2$ und bei $x=1$ Polstellen vor.

Es ist $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} \dfrac{x^2+x+2}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} \dfrac{x^2+x+2}{(x-1)(x+2)} =" \frac{8}{-3\cdot 0^-} "= \infty$,

$\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{x^2+x+2}{(x-1)(x+2)} =" \frac{8}{-3\cdot 0^+} "= -\infty$,

$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{x^2+x+2}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{x^2+x+2}{(x-1)(x+2)} =" \frac{4}{0^-\cdot 3} "= -\infty$,

$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2+x+2}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2+x+2}{(x-1)(x+2)} =" \frac{4}{0^+\cdot 3} "= \infty$.

Somit existieren die beidseitigen Grenzwerte an $x=-2$ und $x=1$ nicht.

Außerdem ist $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2+x+2}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$,

ebenso $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{x^2+x+2}{x^2+x-2} = 1$.

e) Es ist $\dfrac{1}{x^3+x^2} = \dfrac{1}{x^2(x+1)}$. Also liegen Polstellen bei $x=0$ und bei $x=-1$ vor. Es ist $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{1}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{1}{x^2(x+1)} =" \frac{1}{1\cdot 0^-} "= -\infty$,

$\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{1}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{1}{x^2(x+1)} =" \frac{1}{1\cdot 0^+} "= \infty$. Also existiert der beidseitige Grenzwert an $x=-1$ nicht. Es ist $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1}{x^2(x+1)} =" \dfrac{1}{0\cdot 1} "= \infty$.

Außerdem ist $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{x^3+x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{x^3+x^2} = 0$.

f) Es ist für $x \neq 0$: $\dfrac{5x^4}{x^4-2x^3+x^2} = \dfrac{5x^2}{x^2-2x+1} = \dfrac{5x^2}{(x-1)^2}$. Also liegt nur an $x=1$ eine Polstelle vor. (An $x=0$ ist nur eine "Lücke".)

Es ist $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{5x^4}{x^4-2x^3+x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{5x^2}{(x-1)^2} =" \frac{5}{0^+} "= \infty$.

Außerdem ist $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{5x^4}{x^4-2x^3+x^2} = \dfrac{5}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 5$, ebenso $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{5x^4}{x^4-2x^3+x^2} = 5$.

Wie gesagt habe ich oben einen halb-intuitiven Zugang gewählt, der aber richtig ist, wenn man ein paar geeignete Definitionen macht und Sätze zeigt. Aber Vorsicht: Man darf zwar z.B. "$\frac{5}{0^-}$"$= -\infty$ hinschreiben aber z.B. "$\frac{0^+}{0^+}$" darf man nicht betrachten; dem kann man nicht in sinnvoller Weise einen Wert zuweisen.

Und noch ein Hinweis zu Polstellen von rationalen Funktionen: Ganz allgemein gilt: Nehmen wir an, wir haben den Bruch gekürzt. Wenn nun der Nenner von $(x-a)$ geteilt wird, haben wir eine Polstelle an $x=a$. Man kann mehr sagen: Es sei der Nenner gleich $(x-a)^n \cdot g(x)$, wobei a keine Nullstelle von $g(x)$ ist. Wenn nun n ungerade ist, findet an der Polstelle ein Vorzeichenwechsel statt, der beidseitige Grenzwert existiert nicht. Wenn hingegen n gerade ist, findet kein Vorzeichenwechsel statt und der beidseitige Grenzwert existiert.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen. Die Definitionsbereiche sind hier jeweils die maximal möglichen mit der gegebenen

Vorschrift.

$$a)\ (x^2+1)\cdot e^x \qquad b)\ \frac{1}{x^2}\cdot e^{x^3+1} \qquad c)\ 2^{x^2}$$

$$d)\ x^x \qquad e)\ x^{(x^2)} \qquad f)\ 5^{\frac{1}{x}}$$

Beim Benutzen der bekannten Regeln sollte man diese auch angeben.

a) $\big((x^2+1)\cdot e^x\big)' = 2x\cdot e^x + (x^2+1)\cdot e^x = (x^2+2x+1)\cdot e^x.$
In der ersten Gleichung wurde die Produktregel benutzt.

b) $\big(\frac{1}{x^2}\cdot e^{x^3+1}\big)' = \frac{-2}{x^3}\cdot e^{x^3+1} + \frac{1}{x^2}\cdot (e^{x^3+1})' = \frac{-2}{x^3}\cdot e^{x^3+1} + \frac{1}{x^2}\cdot e^{x^3+1}\cdot 3x^2 = (3-\frac{2}{x^3})\cdot e^{x^3+1}.$
Hier wurde bei der ersten Gleichung die Produktregel und bei der zweiten Gleichung die Kettenregel benutzt.

c) $\big(2^{x^2}\big)' = \big(e^{\ln 2\cdot x^2}\big)' = e^{\ln 2\cdot x^2}\cdot \ln(2)\cdot 2\cdot x = \ln(2)\cdot 2\cdot x\cdot 2^{x^2}.$
Hier wurde bei der zweiten Gleichung die Kettenregel benutzt.

d) $\big(x^x\big)' = \big(e^{\ln(x)\cdot x}\big)' = e^{\ln(x)\cdot x}\cdot (\ln(x)\cdot x)' = x^x\cdot(1+\ln(x)).$
Hier wurde bei der zweiten Gleichung die Kettenregel und bei der dritten Gleichung die Produktregel benutzt.

e) $\big(x^{(x^2)}\big)' = \big(e^{\ln(x)\cdot x^2}\big)' = e^{\ln(x)\cdot x^2}\cdot (x+\ln(x)\cdot 2x)) = x^{x^2}\cdot(x+2x\ln(x)).$
Hier wurde in der zweiten Gleichung die Kettenregel und dann noch die Produktregel (für Bestimmen der inneren Ableitung) benutzt. *(Hier wurden also zwei Regeln gleichzeitig benutzt. Das geht natürlich auch.)*

f) $\big(5^{\frac{1}{x}}\big)' = \big(e^{\frac{\ln 5}{x}}\big)' = e^{\frac{\ln 5}{x}}\cdot \frac{-\ln(5)}{x^2} = -\frac{\ln(5)}{x^2}\cdot 5^{\frac{1}{x}}.$
Hier wurde in der zweiten Gleichung die Kettenregel benutzt.