Musterlösung

zur

Klausur zur Vorlesung Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

am 5.8.2015, Zeit: 120 Minuten

Aufgabe 1 (3 Punkte) Eine Bakterienkultur hat eine stetige Wachstumsrate von 100% pro Stunde. Wie groß ist die (diskrete) stündliche Wachstumsrate in etwa?

Entscheiden Sie sich für einen der folgenden Werte und begründen Sie Ihre Antwort kurz.

$$70\% \quad , \quad 100\% \quad , \quad 170\% \quad , \quad 200\% \quad , \quad 270\%$$

Lösung

Die Wachstaumsrate beträgt etwa 170 %.

<u>Begründung:</u>
Allgemein gilt:
Es sei r die stetige Wachstumsrate, f der stündliche Wachstumsfaktor und g die stündliche Wachstumsrate. Dann ist (mit $h =$ Stunde)

$$1 + g = f = e^{r \cdot 1h}$$

Hier ist $r = \frac{100\%}{h} = \frac{1}{h}$ und somit $f = e^1 = e \approx 2,7$ und $g \approx 1,7 = 170\%$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) (2 Punkte) Geben Sie die ersten vier Ableitungen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ an.

b) (2 Punkte) Geben Sie die 100-ste und die 101-ste Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(x)$ an.

c) (3 Punkte) Leiten Sie die Ableitung der Funktion $\tan(x)$ aus den Ableitungen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ (und allgemeinen Regeln über Differenzieren) her. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung
a) Es ist

$$f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),\ f'''(x) = -\cos(x),\ f''''(x) = \sin(x)$$

b) Die 100-ste Ableitung von $f(x)$ ist $\sin(x)$ und die 101-ste Ableitung ist $\cos(x)$.

c)

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Alternativ kann man auch so umformen:

$$\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

(Kursive Texte sind Kommentare.)

Aufgabe 3 (5 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x, y) \mapsto x^3 + x^2y^2 + xy^2 - 3\ .$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an die Höhenlinie der Funktion im Punkt $(1, 1)$.

c) (1 Punkt) Geben Sie die Tangente in c) in parametrisierter Form an.

Lösung

a) Es ist

$$\partial_x f = 3x^2 + 2xy^2 + y^2\ ,\ \partial_y f = 2x^2y + 2xy$$

und somit:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2xy^2 + y^2 \\ 2x^2y + 2xy \end{pmatrix}$$

b) Die Gleichung lautet

$$\nabla f(1, 1) \bullet \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

mit $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Gleichung ist damit:

$$6(x - 1) + 4(y - 1) = 0\ ,$$

d.h.

$$3(x - 1) + 2(y - 1) = 0\ ,$$

d.h.

$$3x + 2y = 5$$

c) Die Tangente ist:

$$\left\{\ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \middle|\ t \in \mathbb{R}\ \right\}$$

Aufgabe 4 (9 Punkte) Bestimmen Sie die (globalen) Maximal- und Minimalstellen sowie die entsprechenden Funktionswerte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x, y) \mapsto 4x + y$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 \leq 17\ .$$

Hinweis. Sie können voraussetzen, dass die Funktion auf der durch die Nebenbedingung gegebenen Menge ein Maximum und ein Minimum hat.

Lösung

Es ist $\partial_x f = 4, \partial_y f = 1$.

Somit ist $\nabla f(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Folglich gibt es keine Maximal- oder Minimalstellen im Inneren, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 < 17$.

Wir untersuchen die Maximal- und Minimalstellen auf dem Rand, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 17$.

Ansatz mit Lagrange:
Es sei $g(x, y) := x^2 + y^2$.
Es ist $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$. Dies ist unter der Nebenbedingung stets $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(Wenn es Stellen (x, y) mit $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ geben würden, müsste man die noch getrennt behandeln. Dies ist hier aber nicht der Fall.)

Nun betrachten wir (unter der Nebenbedingung):

$$\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} \lambda\, g(x, y)$$

Explizit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Es sei (x, y, λ) eine Lösung. Dann ist $\lambda \neq 0$ und

$$x = \frac{2}{\lambda}\ ,\ y = \frac{1}{2\lambda}$$

und somit

$$x = 4y\ .$$

Da $x^2 + y^2 = 17$ ist, folgt: $16y^2 + y^2 = 17$, d.h. $17y^2 = 17$, d.h. $y = \pm 1$.
Wenn $y = 1$ ist, ist $x = 4$. Wenn $y = -1$ ist, ist $x = -4$.
Es ist $f(4, 1) = 17, f(-4, -1) = -17$.

Konklusion: Es gibt genau eine Maximalstelle, diese lautet $(4,1)$ mit Funktionswert 17 und es gibt genau eine Minimalstelle, diese lautet $(-4,-1)$ mit Funktionswert -17.

(Die Tatsache, dass das Maximum 17 ist und dies auch in der Nebenbedingung vorkommt, ist Zufall. Die Tatsache, dass die Maximalstelle $(4,1)$ *ist und dies auch in* ∇f *vorkommt, ist auch Zufall.)*

Aufgabe 5 (15 Punkte)

a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\text{a1)} \int_3^5 x \cdot (\sqrt{x^2-9}\,)^3 \,\mathrm{d}x \qquad \text{a2)} \int_1^3 (x+3) \cdot e^x \,\mathrm{d}x$$

b) (9 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\text{b1)} \int \frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3} \,\mathrm{d}x \qquad \text{b2)} \int \frac{2x}{x^2+2x+10} \,\mathrm{d}x$$

Lösung

a1) Mit der Substitution $z = x^2 - 9$ erhalten wir:

$$\mathrm{d}z = 2x \,\mathrm{d}x;\ x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \,\mathrm{d}z;\ x = 3 \to z = 0;\ x = 5 \to z = 25 - 9 = 16\ .$$

Damit:

$$\int_3^5 x \cdot (\sqrt{x^2-9}\,)^3 \,\mathrm{d}x = \int_0^{16} \frac{1}{2} z^{3/2} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{5} z^{5/2}\Big|_0^{16} = \frac{4^5}{5} = \frac{1024}{5}$$

a2) Wir wenden partielle Integration an mit $u = x + 3;\ v' = e^x;\ u' = 1;\ v = e^x$.
Damit:

$$\int_1^3 (x+3) \cdot e^x \,\mathrm{d}x = (x+3)e^x\Big|_1^3 - \int_1^3 1 \cdot e^x \,\mathrm{d}x =$$

$$(x+3)e^x\Big|_1^3 - e^x\Big|_1^3 = 6e^3 - 4e - e^3 + e = 5e^3 - 3e$$

b1)

$$x^2 - 4x + 4 = (x^2 - 4x + 3) + 1$$

Damit:

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3} = 1 + \frac{1}{x^2-4x+3}$$

Zerlegung des Nenners:

$$(x^2 - 4x + 3) = (x-1)(x-3)$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:
Ansatz:

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

(Es gibt eindeutig bestimmte solche A, B; das braucht nicht begründet zu werden.)

$$\Longrightarrow 1 = A(x-3) + B(x-1)$$

$$\Longrightarrow \text{mit } x = 1: \; 1 = A \cdot (-2) = -2A \quad ; \text{ mit } x = 3: \; 1 = B \cdot 2 = 2B$$

Also:

$$A = -\frac{1}{2} \; ; \; B = \frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3}$$

Insgesamt:

$$\int \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 3} \, \mathrm{d}x = \int (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3}) \, \mathrm{d}x =$$

$$x - \frac{1}{2} \log(|x-1|) + \frac{1}{2} \log(|x-3|)$$

b2) Es ist $\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 10 = -9 < 0$. Somit hat $x^2 + 2x + 10$ keine Nullstellen.

$$\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 10} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{2x+2}{x^2 + 2x + 10} - \frac{2}{x^2 + 2x + 10}\right) \mathrm{d}x =$$

$$\log(x^2 + 2x + 10) - 2 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + 9} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 9} \, \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} \, \mathrm{d}x$$

mit $z = \frac{x+1}{3}$, also $\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{3}$:

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{z^2 + 1} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{3} \arctan(z) = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

Insgesamt:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 10} \, \mathrm{d}x = \log(x^2 + 2x + 10) - \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

Aufgabe 6 (9 Punkte) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungsystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & -2 \\ -2x_1 & & & + & ax_3 & = & b \end{array}$$

in Abhängigkeit von a und b.

Lösung

$$\left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & a & b \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & a-2 & b-2 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & b-2 \end{array}\right.$$

1. Fall: $a \neq -2$:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-2}{a+2} \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -1+\frac{b-2}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & -2\frac{b-2}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-2}{a+2} \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1-\frac{b-2}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & -2\frac{b-2}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-2}{a+2} \end{array}\right. \begin{array}{l} = \frac{-a-b}{a+2} \\ = \frac{-2b+4}{a+2} \\ \end{array}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-a-b}{a+2} \\ \frac{-2b+4}{a+2} \\ \frac{b-2}{a+2} \end{pmatrix} \right\}$$

2. Fall: $a = -2$; $b \neq 2$: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. Fall: $a = -2$; $b = 2$:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (12 Punkte)

a) (6 Punkte) Geben Sie an, ob die folgenden Matrizen jeweils in reduzierter Zeilen-Stufenform sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung für diejenigen Matrizen, für die dies *nicht* der Fall ist.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Kerne der Matrizen.

c) (2 Punkte) Geben Sie für die Matrizen A und B Basen der Kerne an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

a)

A: Nein, denn der Eintrag links oben ist eine 2 (und nicht eine 1).

B: Ja.

C: Nein, denn in die Stufe von der ersten zur zweiten Spalte hat die Höhe 2 (und nicht die Höhe 1).

D: Ja.

b)

$\mathrm{Kern}(A) = \{\underline{0}\}$

Zu $\mathrm{Kern}(B)$: Einfügen von -1-Zeilen *(siehe $\rightarrow$)* zum Anwenden des Ablesetricks ergibt:

$$\begin{array}{c|cccccc} & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ \rightarrow & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \rightarrow & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

(Es werden nun die Spalten abgelesen, in denen die -1-en eingefügt wurden, siehe $\downarrow$.)

$$\mathrm{Kern}(B) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zu Kern(C): $C \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{Kern}(C) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zu Kern(D): Ablesetrick:

$$\begin{array}{ccccc} & & \downarrow & & \downarrow \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \to & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \to & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\mathrm{Kern}(D) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

c)

Zu A: Hier ist die Basis leer.

Zu B: Eine Basis lautet $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(Die Lösung ist nicht eindeutig. Beispielsweise kann anstatt des ersten Vektors auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *angegeben werden.)*