

§7 Rechnen mit Polynomen

Zu Polynomfunktionen

Satz. Zwei Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_1 x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ ist.

Zu Polynomfunktionen

Satz. Zwei Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_1 x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ ist.

Beachte hier: Die beiden Funktionen f und g sind nach Definition genau dann gleich, wenn für alle Zahlen x gilt: $f(x) = g(x)$.

Zu Polynomfunktionen

Es werden hier zwei “wenn-dann”-Aussagen gemacht.

Die eine ist:

Wenn $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ ist, dann sind die Funktionen f und g gleich.

Die andere ist:

Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$.

Zu Polynomfunktionen

Es werden hier zwei “wenn-dann”-Aussagen gemacht.

Die eine ist:

Wenn $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ ist, dann sind die Funktionen f und g gleich.

Die andere ist:

Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$.

Die erste Aussage ist klar, wir betrachten die zweite.

Zu Polynomfunktionen

Es wird behauptet: Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Zu Polynomfunktionen

Es wird behauptet: Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Mit anderen Worten: Es wird behauptet, dass das Folgende *nicht* möglich ist:

Zu Polynomfunktionen

Es wird behauptet: Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Mit anderen Worten: Es wird behauptet, dass das Folgende *nicht* möglich ist:

Die Funktionen f und g sind gleich, aber trotzdem gibt es ein k mit $a_k \neq b_k$.

Zu Polynomfunktionen

Die folgenden Aussagen haben denselben mathematischen Inhalt und sind nur rhetorisch unterschiedlich:

Zu Polynomfunktionen

Die folgenden Aussagen haben denselben mathematischen Inhalt und sind nur rhetorisch unterschiedlich:

Die Funktionen f und g sind gleich, *aber trotzdem* gibt es ein k mit $a_k \neq b_k$.

Zu Polynomfunktionen

Die folgenden Aussagen haben denselben mathematischen Inhalt und sind nur rhetorisch unterschiedlich:

Die Funktionen f und g sind gleich, *aber trotzdem* gibt es ein k mit $a_k \neq b_k$.

Die Funktionen f und g sind gleich *und* es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$.

Zu Polynomfunktionen

Die folgenden Aussagen haben denselben mathematischen Inhalt und sind nur rhetorisch unterschiedlich:

Die Funktionen f und g sind gleich, *aber trotzdem* gibt es ein k mit $a_k \neq b_k$.

Die Funktionen f und g sind gleich *und* es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$.

Es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$ *und* die Funktionen f und g sind gleich.

Zu Polynomfunktionen

Die folgenden Aussagen haben denselben mathematischen Inhalt und sind nur rhetorisch unterschiedlich:

Die Funktionen f und g sind gleich, *aber trotzdem* gibt es ein k mit $a_k \neq b_k$.

Die Funktionen f und g sind gleich *und* es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$.

Es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$ *und* die Funktionen f und g sind gleich.

Es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$, *aber trotzdem* sind die Funktionen f und g gleich.

Zu Polynomfunktionen

Es wird behauptet: Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Mit anderen Worten: Es wird behauptet, dass das Folgende *nicht* möglich ist:

Die Funktionen f und g sind gleich, aber trotzdem gibt es ein k mit $a_k \neq b_k$.

Das ist genau die gleiche Aussage wie:

Es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$, aber trotzdem sind die Funktionen f und g gleich.

Das kann man auch so sagen: Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann sind die Funktionen f und g ungleich.

Zu Polynomfunktionen

Behauptung. Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Umformulierung. Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann sind die Funktionen f und g ungleich.

Zu Polynomfunktionen

Behauptung. Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Umformulierung. Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann sind die Funktionen f und g ungleich.

Das heißt: Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann gibt es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$.

Zu Polynomfunktionen

Behauptung. Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Umformulierung. Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann sind die Funktionen f und g ungleich.

Das heißt: Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann gibt es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$.

Dies zeigen wir jetzt.

Zu Polynomfunktionen

Wir wollen zeigen:

Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann gibt es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$.

Zu Polynomfunktionen

Wir setzen voraus, dass es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt. Wir nehmen das größte k mit dieser Eigenschaft und wir setzen OE voraus, dass $a_k > b_k$ ist.

Zu Polynomfunktionen

Wir setzen voraus, dass es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt. Wir nehmen das größte k mit dieser Eigenschaft und wir setzen OE voraus, dass $a_k > b_k$ ist.

Wir wollen zeigen, dass es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$ gibt.

Zu Polynomfunktionen

Wir setzen voraus, dass es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt. Wir nehmen das größte k mit dieser Eigenschaft und wir setzen OE voraus, dass $a_k > b_k$ ist.

Wir wollen zeigen, dass es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$ gibt.

Wir betrachten nun die Funktion

$$f - g : x \mapsto f(x) - g(x)$$

Zu Polynomfunktionen

Wir setzen voraus, dass es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt. Wir nehmen das größte k mit dieser Eigenschaft und wir setzen OE voraus, dass $a_k > b_k$ ist.

Wir wollen zeigen, dass es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$ gibt.

Wir betrachten nun die Funktion

$$\begin{aligned} f - g : x \mapsto f(x) - g(x) \\ = (a_n x^n + \cdots + a_0) - (b_n x^n + \cdots + b_0) \end{aligned}$$

Zu Polynomfunktionen

Wir setzen voraus, dass es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt. Wir nehmen das größte k mit dieser Eigenschaft und wir setzen OE voraus, dass $a_k > b_k$ ist.

Wir wollen zeigen, dass es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$ gibt.

Wir betrachten nun die Funktion

$$\begin{aligned} f - g : x &\mapsto f(x) - g(x) \\ &= (a_n x^n + \cdots + a_0) - (b_n x^n + \cdots + b_0) \\ &= (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0) \end{aligned}$$

Zu Polynomfunktionen

Wir setzen voraus, dass es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt. Wir nehmen das größte k mit dieser Eigenschaft und wir setzen OE voraus, dass $a_k > b_k$ ist.

Wir wollen zeigen, dass es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$ gibt.

Wir betrachten nun die Funktion

$$\begin{aligned} f - g : x &\mapsto f(x) - g(x) \\ &= (a_n x^n + \cdots + a_0) - (b_n x^n + \cdots + b_0) \\ &= (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0) \\ &= (a_k - b_k)x^k + (a_{k-1} - b_{k-1})x^{k-1} + \cdots + (a_0 - b_0) \end{aligned}$$

mit $a_k - b_k \neq 0$.

Zu Polynomfunktionen

Wir setzen voraus, dass es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt. Wir nehmen das größte k mit dieser Eigenschaft und wir setzen OE voraus, dass $a_k > b_k$ ist.

Wir wollen zeigen, dass es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$ gibt.

Wir betrachten nun die Funktion

$$\begin{aligned} f - g : x &\mapsto f(x) - g(x) \\ &= (a_n x^n + \cdots + a_0) - (b_n x^n + \cdots + b_0) \\ &= (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0) \\ &= (a_k - b_k)x^k + (a_{k-1} - b_{k-1})x^{k-1} + \cdots + (a_0 - b_0) \end{aligned}$$

mit $a_k - b_k \neq 0$.

Wir wissen schon: Für große x ist $f(x) - g(x) \geq \frac{1}{2}(a_k - b_k)x^k$.

Also gibt es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$.

Zu Polynomfunktionen

Wir setzen voraus, dass es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt. Wir nehmen das größte k mit dieser Eigenschaft und wir setzen OE voraus, dass $a_k > b_k$ ist.

Wir wollen zeigen, dass es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$ gibt.

Wir betrachten nun die Funktion

$$\begin{aligned} f - g : x &\mapsto f(x) - g(x) \\ &= (a_n x^n + \cdots + a_0) - (b_n x^n + \cdots + b_0) \\ &= (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0) \\ &= (a_k - b_k)x^k + (a_{k-1} - b_{k-1})x^{k-1} + \cdots + (a_0 - b_0) \end{aligned}$$

mit $a_k - b_k \neq 0$.

Wir wissen schon: Für große x ist $f(x) - g(x) \geq \frac{1}{2}(a_k - b_k)x^k$.

Also gibt es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$.

Das war zu zeigen!

Zu Polynomfunktionen

Wir haben bewiesen:

Satz. Zwei Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_1 x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ ist.

Zu Polynomfunktionen

Wir haben bewiesen:

Satz. Zwei Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_1 x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ ist.

Bemerkung. Ohne diesen Satz könnte man eigentlich gar nicht vom *Grad* einer Polynomfunktion sprechen.

Zu Polynomfunktionen

Polynomfunktionen haben also die folgenden Eigenschaften:

1. Man kann sie in der Form

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

schreiben, wobei $a_0, \dots, a_n$ Zahlen sind.

Zu Polynomfunktionen

Polynomfunktionen haben also die folgenden Eigenschaften:

1. Man kann sie in der Form

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

schreiben, wobei $a_0, \dots, a_n$ Zahlen sind.

2. Zwei Polynomfunktionen

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

und

$$x \mapsto b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ ist.

Die Idee der Polynome

Die Idee der Polynome

Statt ausführlich eine Polynomfunktion wie z.B

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} , x \mapsto f(x) := x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

hinzuschreiben, schreiben wir nun einfach

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

Die Idee der Polynome

Statt ausführlich eine Polynomfunktion wie z.B

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} , x \mapsto f(x) := x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

hinzuschreiben, schreiben wir nun einfach

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

Wir betrachten hier x als *Unbestimmte*, mit der man “ganz normal” rechnen kann.

Die Idee der Polynome

Statt ausführlich eine Polynomfunktion wie z.B

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} , x \mapsto f(x) := x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

hinzuschreiben, schreiben wir nun einfach

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

Wir betrachten hier x als *Unbestimmte*, mit der man “ganz normal” rechnen kann. Wir vergessen, dass wir Funktionen betrachten und betonen, dass wir “mit der Unbestimmten x ” rechnen können.

Die Idee der Polynome

Statt ausführlich eine Polynomfunktion wie z.B

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} , x \mapsto f(x) := x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

hinzuschreiben, schreiben wir nun einfach

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

Wir betrachten hier x als *Unbestimmte*, mit der man “ganz normal” rechnen kann. Wir vergessen, dass wir Funktionen betrachten und betonen, dass wir “mit der Unbestimmten x ” rechnen können.

Wenn wir uns auf diesen Standpunkt stellen, sprechen wir von *Polynomen*.

Die Idee der Polynome

Polynome haben also die folgenden Eigenschaften:

1. Man kann sie in der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

schreiben, wobei $a_0, \dots, a_n$ Zahlen sind.

Die Idee der Polynome

Polynome haben also die folgenden Eigenschaften:

1. Man kann sie in der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

schreiben, wobei $a_0, \dots, a_n$ Zahlen sind.

2. Zwei Polynome

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

und

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ ist.

Die Idee der Polynome

Polynome haben also die folgenden Eigenschaften:

1. Man kann sie in der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

schreiben, wobei $a_0, \dots, a_n$ Zahlen sind.

2. Zwei Polynome

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

und

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ ist.

3. Man kann sie “ganz normal” addieren, subtrahieren und multiplizieren, wenn man x als “Unbestimmte” auffasst.

Die Idee der Polynome

Wir können also z.B. das Polynom

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

betrachten, oder das Polynom

$$\frac{92}{15} \cdot x^{10034} + \frac{345}{732} x^{23} + \pi$$

Die Idee der Polynome

Wir können also z.B. das Polynom

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

betrachten, oder das Polynom

$$\frac{92}{15} \cdot x^{10034} + \frac{345}{732} x^{23} + \pi ,$$

oder für eine feste Zahl a das Polynom

$$x^{234} + ax + 1$$

Die Idee der Polynome

Wir können also z.B. das Polynom

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

betrachten, oder das Polynom

$$\frac{92}{15} \cdot x^{10034} + \frac{345}{732} x^{23} + \pi ,$$

oder für eine feste Zahl a das Polynom

$$x^{234} + ax + 1 ,$$

oder einfach für eine nicht-negative ganze Zahl n das *Monom*

$$x^n$$

Die Idee der Polynome

Wir können also z.B. das Polynom

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

betrachten, oder das Polynom

$$\frac{92}{15} \cdot x^{10034} + \frac{345}{732} x^{23} + \pi ,$$

oder für eine feste Zahl a das Polynom

$$x^{234} + ax + 1 ,$$

oder einfach für eine nicht-negative ganze Zahl n das *Monom*

$$x^n ,$$

d.h. $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2, \dots$

Die Idee der Polynome

Wir betrachten

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

Die Idee der Polynome

Wir betrachten

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

In diesem Beispiel sagen wir:

Die Idee der Polynome

Wir betrachten

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

In diesem Beispiel sagen wir: $f(x)$ ist

- ein Polynom *dritten Grades*

Die Idee der Polynome

Wir betrachten

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

In diesem Beispiel sagen wir: $f(x)$ ist

- ▶ ein Polynom *dritten Grades*
- ▶ mit den *Termen* 5 , $-3x$, $2x^2$, x^3
- ▶ und den *Koeffizienten* 5 ; -3 ; 2 ; 1 .

Die Idee der Polynome

Wir betrachten

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

In diesem Beispiel sagen wir: $f(x)$ ist

- ▶ ein Polynom *dritten Grades*
- ▶ mit den *Termen* 5 , $-3x$, $2x^2$, x^3
- ▶ und den *Koeffizienten* 5 ; -3 ; 2 ; 1 .
- ▶ Hier ist x^3 der *führende Term*
- ▶ und 5 der *konstante Term*.

Die Idee der Polynome

Wir betrachten

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 .$$

In diesem Beispiel sagen wir: $f(x)$ ist

- ▶ ein Polynom *dritten Grades*
- ▶ mit den *Termen* 5 , $-3x$, $2x^2$, x^3
- ▶ und den *Koeffizienten* 5 ; -3 ; 2 ; 1 .
- ▶ Hier ist x^3 der *führende Term*
- ▶ und 5 der *konstante Term*.

Da der führende Koeffizient gleich 1 ist, ist das Polynom *normiert*.

Die Idee der Polynome

Der *Grad* eines Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit Zahlen $a_0, \dots, a_n$ und $a_n \neq 0$ ist definiert als n .

Die Idee der Polynome

Der *Grad* eines Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit Zahlen $a_0, \dots, a_n$ und $a_n \neq 0$ ist definiert als n .

Ein *konstantes Polynom* ist ein Polynom der Form

$$f(x) = a$$

mit einer Zahl a .

Die Idee der Polynome

Der *Grad* eines Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit Zahlen $a_0, \dots, a_n$ und $a_n \neq 0$ ist definiert als n .

Ein *konstantes Polynom* ist ein Polynom der Form

$$f(x) = a$$

mit einer Zahl a .

Wenn nun $a \neq 0$ ist, ist der Grad gleich 0.

Die Idee der Polynome

Der *Grad* eines Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit Zahlen $a_0, \dots, a_n$ und $a_n \neq 0$ ist definiert als n .

Ein *konstantes Polynom* ist ein Polynom der Form

$$f(x) = a$$

mit einer Zahl a .

Wenn nun $a \neq 0$ ist, ist der Grad gleich 0.

Wenn $a = 0$ ist, erhalten wir das *Nullpolynom*, auch *triviales Polynom* genannt.

Wir definieren: Der Grad des Nullpolynoms sei -1 .

Die Idee der Polynome

Polynome kann man

- ▶ addieren,
- ▶ subtrahieren,
- ▶ multiplizieren,

wobei die üblichen Rechenregeln gelten.

Die Idee der Polynome

Polynome kann man

- ▶ addieren,
- ▶ subtrahieren,
- ▶ multiplizieren,

wobei die üblichen Rechenregeln gelten.

Z.B. ist das Polynom $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ selbst eine Summe seiner Terme

$$x^3, 2x^2, -3x, 5,$$

Die Idee der Polynome

Polynome kann man

- ▶ addieren,
- ▶ subtrahieren,
- ▶ multiplizieren,

wobei die üblichen Rechenregeln gelten.

Z.B. ist das Polynom $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ selbst eine Summe seiner Terme

$$x^3, 2x^2, -3x, 5,$$

der Term $2x^2$ ist das Produkt von 2 und dem Monom x^2

Die Idee der Polynome

Polynome kann man

- ▶ addieren,
- ▶ subtrahieren,
- ▶ multiplizieren,

wobei die üblichen Rechenregeln gelten.

Z.B. ist das Polynom $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ selbst eine Summe seiner Terme

$$x^3, 2x^2, -3x, 5,$$

der Term $2x^2$ ist das Produkt von 2 und dem Monom x^2 , und x^2 selbst ist ein Produkt von x und x .

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) =$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) =$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2 + 4x$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2 + 4x - 2x^2$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2 + 4x - 2x^2 - 2x$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2 + 4x - 2x^2 - 2x - 8$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2 + 4x - 2x^2 - 2x - 8 = x^3$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2 + 4x - 2x^2 - 2x - 8 = x^3 - x^2$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2 + 4x - 2x^2 - 2x - 8 = x^3 - x^2 + 2x - 8$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2 + 4x - 2x^2 - 2x - 8 = x^3 - x^2 + 2x - 8$$

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 + x + 4) \cdot (x - 2) = x^3 + x^2 + 4x - 2x^2 - 2x - 8 = x^3 - x^2 + 2x - 8$$

Wenn man die Unbestimmte x durch irgendeine Zahl ersetzt, bleiben die Rechnungen immer noch richtig.

Einsetzen

Man kann x sogar durch ein anderes Polynom ersetzen und die Rechnungen bleiben richtig.

Einsetzen

Man kann x sogar durch ein anderes Polynom ersetzen und die Rechnungen bleiben richtig.

Beispiel.

$$(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$$

Wir ersetzen x durch $x - 2$:

Einsetzen

Man kann x sogar durch ein anderes Polynom ersetzen und die Rechnungen bleiben richtig.

Beispiel.

$$(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$$

Wir ersetzen x durch $x - 2$:

$$((x - 2) - 1)((x - 2) + 1) = (x - 2)^2 - 1$$

Einsetzen

Man kann x sogar durch ein anderes Polynom ersetzen und die Rechnungen bleiben richtig.

Beispiel.

$$(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$$

Wir ersetzen x durch $x - 2$:

$$((x - 2) - 1)((x - 2) + 1) = (x - 2)^2 - 1$$

D.h.

$$(x - 3) \cdot (x - 1) = x^2 - 4x + 3$$

Einsetzen

Es sei $f(x)$ ein Polynom und a eine Zahl.

Einsetzen

Es sei $f(x)$ ein Polynom und a eine Zahl.

Wir können nun a “für x einsetzen”. Wir erhalten den Wert der Polynomfunktion $x \mapsto f(x)$ an der Stelle $x = a$.

Mit anderen Worten: Wir erhalten $f(a)$.

Einsetzen

Es sei $f(x)$ ein Polynom und a eine Zahl.

Wir können nun a “für x einsetzen”. Wir erhalten den Wert der Polynomfunktion $x \mapsto f(x)$ an der Stelle $x = a$.

Mit anderen Worten: Wir erhalten $f(a)$.

Man sagt nun:

“Für $x = a$ ist der Wert des Polynoms $f(x)$ gleich $f(a)$.”

Einsetzen

Beispiel. Wir sagen:

“Für $x = 2$ ist der Wert des Polynoms $f(x) = x^2 - 1$ gleich 3.”

Einsetzen

Beispiel. Wir sagen:

“Für $x = 2$ ist der Wert des Polynoms $f(x) = x^2 - 1$ gleich 3.”

Aber: Das Polynom (!) x ist nicht gleich dem Polynom 2!

Einsetzen

Beispiel. Wir sagen:

“Für $x = 2$ ist der Wert des Polynoms $f(x) = x^2 - 1$ gleich 3.”

Aber: Das Polynom (!) x ist nicht gleich dem Polynom 2!

Also haben wir $x \neq 2$, wenn wir von Polynomen reden.

Einsetzen

Beispiel. Wir sagen:

“Für $x = 2$ ist der Wert des Polynoms $f(x) = x^2 - 1$ gleich 3.”

Aber: Das Polynom (!) x ist nicht gleich dem Polynom 2!

Also haben wir $x \neq 2$, wenn wir von Polynomen reden.

Wir sehen: “Für $x = 2$ ” ist eine Redensart, die im Widerspruch zur Idee der Polynome steht.

Einsetzen

Beispiel. Wir sagen:

“Für $x = 2$ ist der Wert des Polynoms $f(x) = x^2 - 1$ gleich 3.”

Aber: Das Polynom (!) x ist nicht gleich dem Polynom 2!

Also haben wir $x \neq 2$, wenn wir von Polynomen reden.

Wir sehen: “Für $x = 2$ ” ist eine Redensart, die im Widerspruch zur Idee der Polynome steht.

Besser wäre: “Wenn man für x die Zahl 2 einsetzt, erhält man ...”

Einsetzen

Wenn $g(x)$ ein weiteres Polynom ist, erhalten wir durch Ersetzen das Polynom $f(g(x))$.

Z.B.

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = x - 2$$

Wir erhalten:

$$f(g(x)) = x^2 - 2x + 3$$

Einsetzen

Wenn $g(x)$ ein weiteres Polynom ist, erhalten wir durch Ersetzen das Polynom $f(g(x))$.

Z.B.

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = x - 2$$

Wir erhalten:

$$f(g(x)) = x^2 - 2x + 3$$

Dieses Polynom $f(g(x))$ entspricht der Polynomfunktion, die durch Hintereinanderausführung von $g(x)$ und $f(x)$ gegeben ist, d.h.

$$x \mapsto f(g(x))$$

Vergleich mit ganzen Zahlen

Vergleich mit ganzen Zahlen

Es gibt viele Gemeinsamkeiten zwischen Polynomen und ganzen Zahlen:

Vergleich mit ganzen Zahlen

Es gibt viele Gemeinsamkeiten zwischen Polynomen und ganzen Zahlen:

- ▶ Beide kann man addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Vergleich mit ganzen Zahlen

Es gibt viele Gemeinsamkeiten zwischen Polynomen und ganzen Zahlen:

- ▶ Beide kann man addieren, subtrahieren und multiplizieren.
- ▶ Dabei gelten die üblichen Rechenregeln (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität).

Vergleich mit ganzen Zahlen

Es gibt viele Gemeinsamkeiten zwischen Polynomen und ganzen Zahlen:

- ▶ Beide kann man addieren, subtrahieren und multiplizieren.
- ▶ Dabei gelten die üblichen Rechenregeln (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität).

Es gibt noch eine weitere Gemeinsamkeit:

- ▶ Für ganze Zahlen gibt es *Teilen mit Rest* ...

Vergleich mit ganzen Zahlen

Es gibt viele Gemeinsamkeiten zwischen Polynomen und ganzen Zahlen:

- ▶ Beide kann man addieren, subtrahieren und multiplizieren.
- ▶ Dabei gelten die üblichen Rechenregeln (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität).

Es gibt noch eine weitere Gemeinsamkeit:

- ▶ Für ganze Zahlen gibt es *Teilen mit Rest* ... und ebenso für Polynome ...

Teilen mit Rest

Unter ganzen Zahlen haben wir *Teilen mit Rest*:

$$132 : 11 = 12 \quad 132 = 11 \cdot 12$$

Teilen mit Rest

Unter ganzen Zahlen haben wir *Teilen mit Rest*:

$$132 : 11 = 12 \qquad 132 = 11 \cdot 12$$

$$133 : 11 = 12 + \frac{1}{11} \qquad 133 = 11 \cdot 12 + 1$$

Teilen mit Rest

Unter ganzen Zahlen haben wir *Teilen mit Rest*:

$$132 : 11 = 12 \quad 132 = 11 \cdot 12$$

$$133 : 11 = 12 + \frac{1}{11} \quad 133 = 11 \cdot 12 + 1$$

Hier ist 1 der Rest bei der Division von 133 durch 11.

Teilen mit Rest

Unter ganzen Zahlen haben wir *Teilen mit Rest*:

$$132 : 11 = 12 \quad 132 = 11 \cdot 12$$

$$133 : 11 = 12 + \frac{1}{11} \quad 133 = 11 \cdot 12 + 1$$

Hier ist 1 der Rest bei der Division von 133 durch 11. Um von *Teilen mit Rest* zu sprechen, brauchen wir nur ganze Zahlen, rationale Zahlen brauchen wir nicht.

Teilen mit Rest

Unter ganzen Zahlen haben wir *Teilen mit Rest*:

$$132 : 11 = 12 \quad 132 = 11 \cdot 12$$

$$133 : 11 = 12 + \frac{1}{11} \quad 133 = 11 \cdot 12 + 1$$

Hier ist 1 der Rest bei der Division von 133 durch 11. Um von *Teilen mit Rest* zu sprechen, brauchen wir nur ganze Zahlen, rationale Zahlen brauchen wir nicht.

Polynomdivision ist Teilen mit Rest angewandt auf Polynome.

Polynomdivision

$$3x^2 + 11x + 12 : 12 =$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 2x + 4 = 1.5x + 1 \\ \underline{3x^2 + 6x + 4} \\ 5x + 8 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 12 = 2 \\ - \underline{24} \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 12 = 2 \\ - 24 \\ \hline 8 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 12 = 2 \\ - 24 \\ \hline 81 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 12 = 26 \\ - \underline{24} \\ 81 \\ 72 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 12 = 26 \\ - \underline{24} \\ 81 \\ - \underline{72} \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 12 = 26 \\ - \underline{24} \\ 81 \\ - \underline{72} \\ 9 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 12 = 26 \\ - \underline{24} \\ 81 \\ - \underline{72} \\ 91 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 12 = 267 \\ - \underline{24} \\ 81 \\ - \underline{72} \\ 91 \\ 84 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 12 : 12 = 267 \\ - \underline{24} \\ 81 \\ - \underline{72} \\ 91 \\ - \underline{84} \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 11x + 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{24} \\ 81 \\ - \underline{72} \\ 91 \\ - \underline{84} \\ 7 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot (2H \\ 2 \ 4 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3211 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{24} \\ 81 \\ - \underline{72} \\ 91 \\ - \underline{84} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3211 = 12 \cdot (267) + 7 \\ - \underline{2400} \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot (2H \\ - \underline{2 \ 4 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot (2H + 6Z) \\ - \underline{2 \ 4 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 1 \ 1 \\ 7 \ 2 \ 0 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot (2H + 6Z) \\ - \underline{2 \ 4 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 1 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2 \ 0} \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot (2H + 6Z) \\ - \underline{2 \ 4 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 1 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2 \ 0} \\ 9 \ 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot (2H + 6Z + 7E) \\ - \underline{2 \ 4 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 1 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2 \ 0} \\ 9 \ 1 \\ 8 \ 4 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ \phantom{3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12}} 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ \phantom{3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12}} 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ \phantom{3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12}} 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot (2H + 6Z + 7E) \\ - \underline{2 \ 4 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 1 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2 \ 0} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot (2H + 6Z + 7E) \\ - \underline{2 \ 4 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 1 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2 \ 0} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot (2H + 6Z + 7E) + 7 \\ - \underline{2 \ 4 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 1 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2 \ 0} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\ - \underline{2 \ 4} \\ 8 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \ 1 = 12 \cdot 267 + 7 \\ - \underline{2 \ 4 \ 0 \ 0} \\ 8 \ 1 \ 1 \\ - \underline{7 \ 2 \ 0} \\ 9 \ 1 \\ - \underline{8 \ 4} \\ 7 \end{array}$$

Polynomdivision

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot$$

Polynomdivision

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3$$

Polynomdivision

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 + 3x^5)$$

Polynomdivision

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 + 6x^4 + 3x^5)$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{l} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ 3x^5 + 6x^4 - 3x^3 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -2x^4 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3) \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 - 2x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \phantom{- (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3})} - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \phantom{- (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3})} - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ \quad x^3 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ x^3 + 2x^2 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ x^3 + 2x^2 - x \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ - (\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ - (\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \\ - 2x^2 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ -2x^2 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ -(-2x^2 - 4x) \\ \hline x + 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ -(-2x^2 - 4x + 2) \\ \hline \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ -(-2x^2 - 4x + 2) \\ \hline \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ - (x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ - (-2x^2 - 4x + 2) \\ \hline x \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ -(-2x^2 - 4x + 2) \\ \hline x - 1 \end{array}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) + (x - 1) \\ -(\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \\ -2x^2 - 3x + 1 \\ -(\underline{-2x^2 - 4x + 2}) \\ x - 1 \end{array}$$

Theorie zur Polynomdivision

Teilen mit Rest mit ganzen Zahlen.

Satz. Es seien a und b ganze Zahlen, $b \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen c und r mit

$$a = c \cdot b + r$$

mit $0 \leq r < |b|$. Die Zahl r heißt der *Rest* bei der Division von a durch b .

Theorie zur Polynomdivision

Teilen mit Rest mit ganzen Zahlen.

Satz. Es seien a und b ganze Zahlen, $b \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen c und r mit

$$a = c \cdot b + r$$

mit $0 \leq r < |b|$. Die Zahl r heißt der *Rest* bei der Division von a durch b .

Definition. Wenn der Rest r gleich 0 ist, sagen wir, dass a durch b *teilbar* ist. Dann ist also

$$a = c \cdot b .$$

Theorie zur Polynomdivision

Satz. Es seien nun Polynome $f(x), g(x)$ gegeben mit $g(x) \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $h(x), r(x)$ mit

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und $\text{Grad}(r(x)) < \text{Grad}(g(x))$. Das Polynom $r(x)$ heißt der *Rest* bei der Division von $f(x)$ durch $g(x)$.

Theorie zur Polynomdivision

Satz. Es seien nun Polynome $f(x), g(x)$ gegeben mit $g(x) \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $h(x), r(x)$ mit

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und $\text{Grad}(r(x)) < \text{Grad}(g(x))$. Das Polynom $r(x)$ heißt der *Rest* bei der Division von $f(x)$ durch $g(x)$.

Definition. Wenn der Rest $g(x)$ gleich 0 ist, sagen wir, dass $f(x)$ durch $g(x)$ *teilbar* ist. Dann ist also

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) .$$

Nullstellen

Es sei nun $f(x)$ ein Polynom und a eine Zahl. Wenn $f(a) = 0$ ist, sagen wir, dass $f(x)$ an der Stelle a eine Nullstelle hat. Dies bedeutet genau, dass $x = a$ eine Lösung der Gleichung

$$f(x) = 0$$

ist.

Nullstellen

Behauptung. $f(x)$ hat genau dann an $x = a$ eine Nullstelle, wenn $f(x)$ durch $x - a$ teilbar ist.

Nullstellen

Behauptung. $f(x)$ hat genau dann an $x = a$ eine Nullstelle, wenn $f(x)$ durch $x - a$ teilbar ist.

Beweis. Wir teilen $f(x)$ durch $x - a$ mit Rest.

Nullstellen

Behauptung. $f(x)$ hat genau dann an $x = a$ eine Nullstelle, wenn $f(x)$ durch $x - a$ teilbar ist.

Beweis. Wir teilen $f(x)$ durch $x - a$ mit Rest.

Wir erhalten

$$f(x) = g(x) \cdot (x - a) + c ,$$

wobei c eine Zahl ist.

Nullstellen

Behauptung. $f(x)$ hat genau dann an $x = a$ eine Nullstelle, wenn $f(x)$ durch $x - a$ teilbar ist.

Beweis. Wir teilen $f(x)$ durch $x - a$ mit Rest.

Wir erhalten

$$f(x) = g(x) \cdot (x - a) + c ,$$

wobei c eine Zahl ist.

Es ist

$$f(a) = g(a) \cdot 0 + c = c .$$

Nullstellen

Behauptung. $f(x)$ hat genau dann an $x = a$ eine Nullstelle, wenn $f(x)$ durch $x - a$ teilbar ist.

Beweis. Wir teilen $f(x)$ durch $x - a$ mit Rest.

Wir erhalten

$$f(x) = g(x) \cdot (x - a) + c ,$$

wobei c eine Zahl ist.

Es ist

$$f(a) = g(a) \cdot 0 + c = c .$$

Somit sind äquivalent:

- ▶ $f(a) = 0$.
- ▶ $c = 0$.
- ▶ $f(x) = g(x) \cdot (x - a)$.
- ▶ $f(x)$ ist durch $x - a$ teilbar.

Mehrfache Nullstellen

Es habe nun das nicht-triviale Polynom $f(x)$ an $x = a$ eine Nullstelle.

Mehrfache Nullstellen

Es habe nun das nicht-triviale Polynom $f(x)$ an $x = a$ eine Nullstelle. Dann ist also

$$f(x) = f_1(x) \cdot (x - a)$$

mit einem Polynom $f_1(x)$.

Mehrfache Nullstellen

Es habe nun das nicht-triviale Polynom $f(x)$ an $x = a$ eine Nullstelle. Dann ist also

$$f(x) = f_1(x) \cdot (x - a)$$

mit einem Polynom $f_1(x)$.

Wir können uns fragen, ob $f_1(x)$ wieder eine Nullstelle an $x = a$ hat.

Mehrfache Nullstellen

Es habe nun das nicht-triviale Polynom $f(x)$ an $x = a$ eine Nullstelle. Dann ist also

$$f(x) = f_1(x) \cdot (x - a)$$

mit einem Polynom $f_1(x)$.

Wir können uns fragen, ob $f_1(x)$ wieder eine Nullstelle an $x = a$ hat.

Wenn dies der Fall ist, haben wir

$$f_1(x) = f_2(x) \cdot (x - a)$$

mit einem Polynom $f_2(x)$.

Mehrfache Nullstellen

Es habe nun das nicht-triviale Polynom $f(x)$ an $x = a$ eine Nullstelle. Dann ist also

$$f(x) = f_1(x) \cdot (x - a)$$

mit einem Polynom $f_1(x)$.

Wir können uns fragen, ob $f_1(x)$ wieder eine Nullstelle an $x = a$ hat.

Wenn dies der Fall ist, haben wir

$$f_1(x) = f_2(x) \cdot (x - a)$$

mit einem Polynom $f_2(x)$.

Dann ist

$$f(x) = f_2(x) \cdot (x - a)^2 .$$

Mehrfache Nullstellen

Wir führen das Teilen fort, solange es geht.

Mehrfache Nullstellen

Wir führen das Teilen fort, solange es geht.

Wir erhalten eine Darstellung der Form

$$f(x) = f_k(x) \cdot (x - a)^k$$

mit $f_k(a) \neq 0$.

Mehrfache Nullstellen

Wir führen das Teilen fort, solange es geht.

Wir erhalten eine Darstellung der Form

$$f(x) = f_k(x) \cdot (x - a)^k$$

mit $f_k(a) \neq 0$.

Hier gilt: Das Polynom $(x - a)^k$ teilt das Polynom $f(x)$, aber das Polynom $(x - a)^{k+1}$ teilt das Polynom nicht.

Mehrfache Nullstellen

Wir führen das Teilen fort, solange es geht.

Wir erhalten eine Darstellung der Form

$$f(x) = f_k(x) \cdot (x - a)^k$$

mit $f_k(a) \neq 0$.

Hier gilt: Das Polynom $(x - a)^k$ teilt das Polynom $f(x)$, aber das Polynom $(x - a)^{k+1}$ teilt das Polynom nicht.

Definition. Die Zahl k heißt die *Ordnung* oder *Vielfachheit* der Nullstelle a des Polynoms $f(x)$.

Mehrfache Nullstellen

Man kann direkt ablesen, ob 0 eine Nullstelle eines Polynoms ist, und man kann direkt die Ordnung ablesen.

Mehrfache Nullstellen

Man kann direkt ablesen, ob 0 eine Nullstelle eines Polynoms ist, und man kann direkt die Ordnung ablesen.

Beispiel. Das Polynom

$$2x^{10} + x^7 + x^5 + 1$$

hat keine Nullstelle an $x = 0$.

Mehrfache Nullstellen

Man kann direkt ablesen, ob 0 eine Nullstelle eines Polynoms ist, und man kann direkt die Ordnung ablesen.

Beispiel. Das Polynom

$$2x^{10} + x^7 + x^5 + 1$$

hat keine Nullstelle an $x = 0$.

Das Polynom

$$2x^{10} + x^7 - x^5 = (2x^5 + x^2 - 1)x^5 = (2x^5 + x^2 - 1)(x - 0)^5$$

hat eine fünffache Nullstelle an $x = 0$.

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

Wir geben uns zwei Polynome $f(x), g(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten vor (d.h. mit Koeffizienten, die ganze Zahlen sind). Wir setzen auch voraus, dass $g(x)$ normiert ist, d.h.

$$g(x) = x^n + \dots$$

Wir führen Teilen mit Rest durch:

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

Wir geben uns zwei Polynome $f(x), g(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten vor (d.h. mit Koeffizienten, die ganze Zahlen sind). Wir setzen auch voraus, dass $g(x)$ normiert ist, d.h.

$$g(x) = x^n + \dots$$

Wir führen Teilen mit Rest durch:

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$$

Wenn man die Polynomdivision betrachtet, sieht man:

Die Polynome $h(x)$ und $r(x)$ haben auch ganzzahlige Koeffizienten.

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 + 3x^5)$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 + 6x^4)$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{aligned} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 &= (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ 3x^5 + 6x^4 - 3x^3 \end{aligned}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - \underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3})$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) - 2x^4)$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{l} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2) \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -2x^4 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -2x^4 - 4x^3 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{l} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -2x^4 - 4x^3 + 2x^2 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \quad - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ \qquad \qquad \qquad x^3 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ \qquad \qquad \qquad x^3 + 0x^2 - 4x \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ x^3 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ x^3 + 2x^2 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ x^3 + 2x^2 - x \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \quad - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ \qquad \quad x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ \qquad \quad - (\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \quad - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ \qquad \quad x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ \qquad \quad - (\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \\ \qquad \qquad \quad - 2x^2 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \quad - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ \qquad \quad x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ \qquad \quad - (\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \\ \qquad \qquad \quad - 2x^2 - 3x \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x \\ - (\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \quad - (\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ \qquad \quad x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ \qquad \quad - (\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \\ \qquad \qquad \quad - 2x^2 - 3x + 1 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ -2x^2 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ -(-2x^2 - 4x) \\ \hline x + 1 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ -(x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ -(-2x^2 - 4x + 2) \\ \hline \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \quad -(\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ \qquad \quad x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ \qquad \quad -(\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \\ \qquad \qquad \quad -2x^2 - 3x + 1 \\ \qquad \qquad \quad -(\underline{-2x^2 - 4x + 2}) \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ - (3x^5 + 6x^4 - 3x^3) \\ \hline -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ - (-2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \\ \hline x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ - (x^3 + 2x^2 - x) \\ \hline -2x^2 - 3x + 1 \\ - (-2x^2 - 4x + 2) \\ \hline x \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ -(\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \quad -(\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ \qquad \quad x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ \qquad \quad -(\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \\ \qquad \qquad \quad -2x^2 - 3x + 1 \\ \qquad \qquad \quad -(\underline{-2x^2 - 4x + 2}) \\ \qquad \qquad \qquad \quad x - 1 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 2) + (x - 1) \\ -(\underline{3x^5 + 6x^4 - 3x^3}) \\ \quad -2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \quad -(\underline{-2x^4 - 4x^3 + 2x^2}) \\ \qquad \quad x^3 + 0x^2 - 4x + 1 \\ \qquad \quad -(\underline{x^3 + 2x^2 - x}) \\ \qquad \qquad \quad -2x^2 - 3x + 1 \\ \qquad \qquad \quad -(\underline{-2x^2 - 4x + 2}) \\ \qquad \qquad \qquad \quad x - 1 \end{array}$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

Satz. Wir geben uns zwei Polynome $f(x)$, $g(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten vor, wobei $g(x)$ normiert ist, d.h.

$$g(x) = x^n + \dots$$

Dann haben die eindeutig bestimmten Polynome $h(x)$ und $r(x)$ mit

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und $\text{Grad}(r(x)) < \text{Grad}(g(x))$ auch ganzzahlige Koeffizienten.

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

Satz. Wir geben uns zwei Polynome $f(x)$, $g(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten vor, wobei $g(x)$ normiert ist, d.h.

$$g(x) = x^n + \dots$$

Dann haben die eindeutig bestimmten Polynome $h(x)$ und $r(x)$ mit

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und $\text{Grad}(r(x)) < \text{Grad}(g(x))$ auch ganzzahlige Koeffizienten.

Wenn nun $f(x)$ durch $g(x)$ teilbar ist, ist

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) ,$$

wobei $h(x)$ ganzzahlige Koeffizienten hat.

Anwendungen

Wir geben uns ein normiertes quadratisches Polynom

$$f(x) = x^2 + px + q$$

mit einer Nullstelle x_1 vor.

Anwendungen

Wir geben uns ein normiertes quadratisches Polynom

$$f(x) = x^2 + px + q$$

mit einer Nullstelle x_1 vor. Wir können durch $x - x_1$ teilen und erhalten

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

mit irgendeiner Zahl x_2 .

Anwendungen

Wir geben uns ein normiertes quadratisches Polynom

$$f(x) = x^2 + px + q$$

mit einer Nullstelle x_1 vor. Wir können durch $x - x_1$ teilen und erhalten

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

mit irgendeiner Zahl x_2 .

Dann ist

$$x^2 + px + q = x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 x_2$$

Anwendungen

Wir geben uns ein normiertes quadratisches Polynom

$$f(x) = x^2 + px + q$$

mit einer Nullstelle x_1 vor. Wir können durch $x - x_1$ teilen und erhalten

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

mit irgendeiner Zahl x_2 .

Dann ist

$$x^2 + px + q = x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1x_2$$

und somit

$$x_1x_2 = q = f(0) \quad , \quad x_1 + x_2 = -p \quad .$$

Anwendungen

Wir geben uns ein normiertes quadratisches Polynom

$$f(x) = x^2 + px + q$$

mit einer Nullstelle x_1 vor. Wir können durch $x - x_1$ teilen und erhalten

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

mit irgendeiner Zahl x_2 .

Dann ist

$$x^2 + px + q = x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 x_2$$

und somit

$$x_1 x_2 = q = f(0) \quad , \quad x_1 + x_2 = -p \quad .$$

Dies ist die Regel von Vieta.

Anwendungen

Wir geben uns ein normiertes quadratisches Polynom

$$f(x) = x^2 + px + q$$

mit einer Nullstelle x_1 vor. Wir können durch $x - x_1$ teilen und erhalten

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

mit irgendeiner Zahl x_2 .

Dann ist

$$x^2 + px + q = x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 x_2$$

und somit

$$x_1 x_2 = q = f(0) \quad , \quad x_1 + x_2 = -p \quad .$$

Dies ist die Regel von Vieta.

Ferner gilt: Wenn p, q und x_1 ganze Zahlen sind, dann ist auch x_2 eine ganze Zahl und beide sind Teiler von q .

Anwendungen

Satz. Wir geben uns irgendein nicht-triviales Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ mit $a_0 \neq 0$ vor.

Dann sind alle ganzzahligen Nullstellen von $f(x)$ Teiler des konstanten Terms von $f(x)$, d.h. von $a_0 = f(0)$.

Anwendungen

Satz. Wir geben uns irgendein nicht-triviales Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ mit $a_0 \neq 0$ vor.

Dann sind alle ganzzahligen Nullstellen von $f(x)$ Teiler des konstanten Terms von $f(x)$, d.h. von $a_0 = f(0)$.

Begründung.

Es sei x_0 eine ganzzahlige Nullstelle von f .

Anwendungen

Satz. Wir geben uns irgendein nicht-triviales Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ mit $a_0 \neq 0$ vor.

Dann sind alle ganzzahligen Nullstellen von $f(x)$ Teiler des konstanten Terms von $f(x)$, d.h. von $a_0 = f(0)$.

Begründung.

Es sei x_0 eine ganzzahlige Nullstelle von f .

Wir haben

$$f(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \cdot (x - x_0)$$

mit einem Polynom $b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

Anwendungen

Satz. Wir geben uns irgendein nicht-triviales Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ mit $a_0 \neq 0$ vor.

Dann sind alle ganzzahligen Nullstellen von $f(x)$ Teiler des konstanten Terms von $f(x)$, d.h. von $a_0 = f(0)$.

Begründung.

Es sei x_0 eine ganzzahlige Nullstelle von f .

Wir haben

$$f(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \cdot (x - x_0)$$

mit einem Polynom $b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten.

Anwendungen

Satz. Wir geben uns irgendein nicht-triviales Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ mit $a_0 \neq 0$ vor.

Dann sind alle ganzzahligen Nullstellen von $f(x)$ Teiler des konstanten Terms von $f(x)$, d.h. von $a_0 = f(0)$.

Begründung.

Es sei x_0 eine ganzzahlige Nullstelle von f .

Wir haben

$$f(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \cdot (x - x_0)$$

mit einem Polynom $b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Hiermit ist

$$a_0 = -x_0 b_0 .$$

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Beispiel. Wir wollen das Polynom

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$$

an irgendeiner Stelle $x = a$ auswerten.

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Beispiel. Wir wollen das Polynom

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$$

an irgendeiner Stelle $x = a$ auswerten.

Wir schreiben

$$f(x) = x \cdot (3x^2 - 2x + 5) + 7$$

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Beispiel. Wir wollen das Polynom

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$$

an irgendeiner Stelle $x = a$ auswerten.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (3x^2 - 2x + 5) + 7 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot 3 - 2) + 5) + 7 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Beispiel. Wir wollen das Polynom

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$$

an irgendeiner Stelle $x = a$ auswerten.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (3x^2 - 2x + 5) + 7 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot 3 - 2) + 5) + 7 \end{aligned}$$

Z.B. für $x = -2$:

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Beispiel. Wir wollen das Polynom

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$$

an irgendeiner Stelle $x = a$ auswerten.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (3x^2 - 2x + 5) + 7 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot 3 - 2) + 5) + 7 \end{aligned}$$

Z.B. für $x = -2$:

$$(-2) \cdot 3 - 2 = -8$$

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Beispiel. Wir wollen das Polynom

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$$

an irgendeiner Stelle $x = a$ auswerten.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (3x^2 - 2x + 5) + 7 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot 3 - 2) + 5) + 7 \end{aligned}$$

Z.B. für $x = -2$:

$$(-2) \cdot 3 - 2 = -8$$

$$(-2) \cdot (-8) + 5 = 21$$

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Beispiel. Wir wollen das Polynom

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$$

an irgendeiner Stelle $x = a$ auswerten.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (3x^2 - 2x + 5) + 7 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot 3 - 2) + 5) + 7 \end{aligned}$$

Z.B. für $x = -2$:

$$(-2) \cdot 3 - 2 = -8$$

$$(-2) \cdot (-8) + 5 = 21$$

$$(-2) \cdot 21 + 7 = -35$$

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Beispiel. Wir wollen das Polynom

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$$

an irgendeiner Stelle $x = a$ auswerten.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (3x^2 - 2x + 5) + 7 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot 3 - 2) + 5) + 7 \end{aligned}$$

Z.B. für $x = -2$:

$$(-2) \cdot 3 - 2 = -8$$

$$(-2) \cdot (-8) + 5 = 21$$

$$(-2) \cdot 21 + 7 = -35$$

Also: $f(-2) = -35$

Das Horner-Schema

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7 \text{ an } x = -2:$$

Das Horner-Schema

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7 \text{ an } x = -2:$$

Symbolisch:

	x^3	x^2	x	1
	3	-2	5	7
$x = -2$	0	-6	16	-42
	3	-8	21	-35

Das Horner-Schema

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7 \text{ an } x = -2:$$

Symbolisch:

	x^3	x^2	x	1
	3	-2	5	7
$x = -2$	0	-6	16	-42
	3	-8	21	-35

Hier kann man sogar noch mehr ablesen:

$$(3x^3 - 2x^2 + 5x + 7) = (x + 2) \cdot (3x^2 - 8x + 21) - 35$$