§3 Funktionen in mehreren Variablen

Funktionen in mehreren Variablen

Wir betrachten nun Abbildungen / Funktionen “in mehreren Variablen”.

Dies sind Funktionen von einer Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$.

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \underline{x} = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto f(x_1, \ldots, x_d) =: f(\underline{x})$$

Funktionen in mehreren Variablen

Wir betrachten nun Abbildungen / Funktionen "in mehreren Variablen".

Dies sind Funktionen von einer Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$.

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \underline{x} = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto f(x_1, \ldots, x_d) =: f(\underline{x})$$

Besonders wichtig sind dabei Abbildungen / Funktionen einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

Funktionen in mehreren Variablen

Wir betrachten nun Abbildungen / Funktionen "in mehreren Variablen".

Dies sind Funktionen von einer Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$.

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \underline{x} = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto f(x_1, \ldots, x_d) =: f(\underline{x})$$

Besonders wichtig sind dabei Abbildungen / Funktionen einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

Grundlegende Konvention. Wir werden oftmals nur Funktionen in zwei Variablen betrachten. Wenn nichts anderes gesagt wird, kann man die Aussagen und Definitionen auch auf Funktion mit mehr Variablen verallgemeinern.

Anwendung in der Geographie

Wir betrachten in einer bestimmten Gegend auf der Erde zu jedem Punkt die Höhe.

Anwendung in der Geographie

Wir betrachten in einer bestimmten Gegend auf der Erde zu jedem Punkt die Höhe.

Dies können wir durch eine Funktion in zwei Variablen beschreiben, die **Höhenfunktion**.

Anwendung in der Geographie

Wir betrachten in einer bestimmten Gegend auf der Erde zu jedem Punkt die Höhe.

Dies können wir durch eine Funktion in zwei Variablen beschreiben, die **Höhenfunktion**.

Höhenlinien geben Punkte mit gleicher Höhe wieder.

Höhenlinien

Höhenlinien

Man kann zu jeder Funktion f in zwei Variablen x, y und zu jedem $c \in \mathbb{R}$ die **Höhenlinie**

$$\{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}$$

betrachten.

Höhenlinien

Man kann zu jeder Funktion f in zwei Variablen x, y und zu jedem $c \in \mathbb{R}$ die **Höhenlinie**

$$\{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}$$

betrachten.

Ebenso zu jeder Funktion f in d Variablen $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ und zu jedem $c \in \mathbb{R}$:

$$\{\underline{x} \in D_f \mid f(\underline{x}) = c\}$$

Anwendung in der Mikroökonomie

Die Funktion f sei eine Nutzenfunktion für 2 Güter und c ein Nutzenniveau.

Dann ist die Höhenlinie

$$\{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}$$

genau die Indifferenzkurve / Indifferenzmenge zu c.

Anwendung in der Mikroökonomie

Die Funktion f sei eine Nutzenfunktion für 2 Güter und c ein Nutzenniveau.

Dann ist die Höhenlinie

$$\{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}$$

genau die Indifferenzkurve / Indifferenzmenge zu c.

Ebenso für eine Nutzenfunktion für d Güter:

$$\{\underline{x} \in D_f \mid f(\underline{x}) = c\}$$

Stetigkeit

Eine Funktion von einer Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ heißt eine **Funktion in d Variablen**.

Stetigkeit

Eine Funktion von einer Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ heißt eine **Funktion in d Variablen**.

Wann wollen wir eine solche Funktion stetig an einem Punkt nennen?

Wiederholung

Wir betrachten eine Funktion in einer Variablen, d.h.

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; x \mapsto f(x)$$

und $x^{(0)} \in D_f$.

Dann sind äquivalent:

a) (Folgenkriterium) Für jede Folge $(\underline{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in D_f mit $x^{(n)} \longrightarrow x^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt auch $f(x^{(n)}) \longrightarrow f(x^{(0)})$ für $n \longrightarrow \infty$.

b) (ε-δ-Kriterium) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x^{(0)})| \le \varepsilon$ für $x \in D_f$ mit $|x - x^{(0)}| \le \delta$.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, heißt die Funktion f **stetig** an $x^{(0)}$.

Stetigkeit

Es sei nun f eine Funktion in d Variablen und $\underline{x}^{(0)} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^d$.

Satz. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) (Folgenkriterium) Für jede Folge $(\underline{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in D_f mit $\underline{x}^{(n)} \longrightarrow x^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt auch $f(\underline{x}^{(n)}) \longrightarrow f(\underline{x}^{(0)})$ für $n \longrightarrow \infty$.

b) (ε-δ-Kriterium) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $\underline{x} \in D_f$ mit $\|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq \delta$.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, heißt die Funktion f **stetig** an $\underline{x}^{(0)}$.

Stetigkeit

Das ε-δ-Kriterium lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $\underline{x} \in D_f$ mit $\|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq \delta$.

Stetigkeit

Das ε-δ-Kriterium lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $\underline{x} \in D_f$ mit $\|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq \delta$.

Formulierung mit Mengen:

Stetigkeit

Das ε-δ-Kriterium lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $\underline{x} \in D_f$ mit $\|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq \delta$.

Formulierung mit Mengen:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(\overline{U}_\delta(\underline{x}^{(0)}) \cap D_f) \subseteq \overline{U}_\varepsilon(f(\underline{x}^{(0)}))$.

Stetigkeit

Das ε-δ-Kriterium lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $\underline{x} \in D_f$ mit $\|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq \delta$.

Formulierung mit Mengen:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(\overline{U}_\delta(\underline{x}^{(0)}) \cap D_f) \subseteq \overline{U}_\varepsilon(f(\underline{x}^{(0)}))$.

Formal:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f(\overline{U}_\delta(\underline{x}^{(0)}) \cap D_f) \subseteq \overline{U}_\varepsilon(f(\underline{x}^{(0)}))$$

Stetigkeit

Definition. Wenn die Abbildung in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig ist, heißt sie **stetig**.

Grenzwerte

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definition. Der **Abschluss** von X ist die Menge aller Punkte von $\mathbb{R}^d$, die der Grenzwert einer Folge in X sind. Bezeichnung: $\overline{X}$.

Grenzwerte

Beispiel. Der Abschluss des offenen Balls

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| < r\}$$

Grenzwerte

Beispiel. Der Abschluss des offenen Balls

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| < r\}$$

ist der abgeschlossene Ball

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq r\} \, .$$

Grenzwerte

Beispiel. Der Abschluss des offenen Balls

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| < r\}$$

ist der abgeschlossene Ball

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq r\} .$$

Der Abschluss dieses abgeschlossenen Balls ist wieder derselbe abgeschlossene Ball.

Beispiel. Der Abschluss des offenen Balls

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| < r\}$$

ist der abgeschlossene Ball

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq r\} .$$

Der Abschluss dieses abgeschlossenen Balls ist wieder derselbe abgeschlossene Ball.

Mit anderen Worten: Der Abschluss der offenen ε-Umgebung $\overset{o}{U}_\varepsilon(\underline{x}^{(0)})$ ist die abgeschlossene ε-Umgebung $\overline{U}_\varepsilon(\underline{x}^{(0)})$.

Grenzwerte

Satz. Sei

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \underline{x} \mapsto f(\underline{x})\,,$$

sei $\underline{x}^{(0)} \in \overline{D}_f$ und sei $w^{(0)} \in \mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

a) (Folgenkriterium) Für jede Folge $(\underline{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^+}$ in $D_f \backslash \{\underline{x}^{(0)}\}$ mit $\underline{x}^{(n)} \longrightarrow \underline{x}^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt $f(\underline{x}^{(n)}) \longrightarrow w^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$.

b) (ε-δ-Kriterium) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(\underline{x}) - w^{(0)}| \leq \varepsilon$ für allle $\underline{x} \in D_f$ mit $0 < \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}| \leq \delta$.

Grenzwert

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, sagen / schreiben wir:

$$\text{Für } \underline{x} \text{ gegen } \underline{x}^{(0)} \text{ strebt } f(\underline{x}) \text{ gegen } w^{(0)}.$$

$$f(\underline{x}) \longrightarrow w^{(0)} \text{ für } \underline{x} \longrightarrow \underline{x}^{(0)}$$

Grenzwert

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, sagen / schreiben wir:

$$\text{Für } \underline{x} \text{ gegen } \underline{x}^{(0)} \text{ strebt } f(\underline{x}) \text{ gegen } w^{(0)}.$$

$$f(\underline{x}) \longrightarrow w^{(0)} \text{ für } \underline{x} \longrightarrow \underline{x}^{(0)}$$

Wir nennen dann $w^{(0)}$ den **Grenzwert** von f an $\underline{x}^{(0)}$.

$$\lim_{\underline{x} \longrightarrow \underline{x}^{(0)}} f(\underline{x}) = w^{(0)}$$

Grenzwerte

In zwei Variablen (x, y):

$$f(x, y) \longrightarrow w^{(0)} \text{ für } (x, y) \longrightarrow (x^{(0)}, y^{(0)})$$

Grenzwerte

In zwei Variablen (x, y):

$$f(x,y) \longrightarrow w^{(0)} \text{ für } (x,y) \longrightarrow (x^{(0)}, y^{(0)})$$

$$f(x,y) \longrightarrow w^{(0)} \text{ für } x \longrightarrow x^{(0)} \text{ und } y \longrightarrow y^{(0)}$$

Grenzwerte

In zwei Variablen (x, y):

$$f(x,y) \longrightarrow w^{(0)} \text{ für } (x,y) \longrightarrow (x^{(0)}, y^{(0)})$$

$$f(x,y) \longrightarrow w^{(0)} \text{ für } x \longrightarrow x^{(0)} \text{ und } y \longrightarrow y^{(0)}$$

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (x^{(0)}, y^{(0)})} f(x,y) = w^{(0)}$$

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow x^{(0)} \\ y \longrightarrow y^{(0)}}} f(x,y) = w^{(0)}$$

Konvergenz und Stetigkeit

Merke. Eine Funktion ist genau dann stetig an $\underline{x}^{(0)} \in D_f$, wenn der Grenzwert an $\underline{x}^{(0)}$ existiert und dieser gleich dem Funktionswert $f(\underline{x}^{(0)})$ ist.

Partielle Ableitungen

Wir betrachten eine Funktion f in zwei Variablen x, y und einen Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Definition. Wenn nun der Grenzwert

$$\lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \frac{f(x, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{x - x^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die **partielle Ableitung von f nach x im Punkt** $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Partielle Ableitungen

Wir betrachten eine Funktion f in zwei Variablen x, y und einen Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Definition. Wenn nun der Grenzwert

$$\lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \frac{f(x, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{x - x^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die **partielle Ableitung von f nach x im Punkt** $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Dies ist also der Differentialquotient / die Ableitung der Funktion $x \mapsto f(x, y^{(0)})$ an $x^{(0)}$.

Partielle Ableitungen

Wir betrachten eine Funktion f in zwei Variablen x, y und einen Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Definition. Wenn nun der Grenzwert

$$\lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \frac{f(x, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{x - x^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die **partielle Ableitung von f nach x im Punkt** $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Dies ist also der Differentialquotient / die Ableitung der Funktion $x \mapsto f(x, y^{(0)})$ an $x^{(0)}$.

Bezeichnung: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})}$ (und weitere – kommt gleich).

Partielle Ableitungen

Analog:

Definition. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{y \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}, y) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{y - y^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}, y^{(0)} + h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die **partielle Ableitung von f nach y im Punkt** $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Partielle Ableitungen

Analog:

Definition. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{y \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}, y) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{y - y^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}, y^{(0)} + h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die **partielle Ableitung von f nach y im Punkt** $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Dies ist also der Differentialquotient / die Ableitung der Funktion $y \mapsto f(x^{(0)}, y)$ an $y^{(0)}$.

Partielle Ableitungen

Analog:

Definition. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{y \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}, y) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{y - y^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}, y^{(0)} + h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die **partielle Ableitung von** f **nach** y **im Punkt** $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Dies ist also der Differentialquotient / die Ableitung der Funktion $y \mapsto f(x^{(0)}, y)$ an $y^{(0)}$.

Bezeichnung z.B.: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})}$.

Partielle Ableigungen

Zurück:

Definition. Wenn nun der Grenzwert

$$\lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \frac{f(x, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{x - x^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die **partielle Ableitung von** f **nach** x **im Punkt** $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Partielle Ableigungen

Zurück:

Definition. Wenn nun der Grenzwert

$$\lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \frac{f(x, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{x - x^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennt man ihn die **partielle Ableitung von f nach x im Punkt** $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Wir setzen nun voraus, dass die partielle Ableitung nach x in allen Punkten existiert. Dann erhalten wir die Funktion

$$D_f \longrightarrow \mathbb{R};, \ (x^{(0)}, y^{(0)}) \mapsto \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} ,$$

die **partielle Ableitung** von f nach x.

Bezeichnung: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und auch $\partial_x f, f_x, D_x f$.

Partielle Ableitungen

Die partielle Ableitung von f nach x ist:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \partial_x f = f_x = D_x f$$

Der Wert der Funktion $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ an einem Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ist die partielle Ableitung von f in diesem Punkt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) = \\ f_x(x^{(0)}, y^{(0)}) &= \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) = D_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen

Merke

Man erhält $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, indem man jeweils für feste y die Funktion $h_y : x \mapsto f(x,y)$ (nach x) ableitet.

Partielle Ableitungen

Merke

Man erhält $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, indem man jeweils für feste y die Funktion $h_y : x \mapsto f(x,y)$ (nach x) ableitet.

Man erhält $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, indem man jeweils für feste x die Funktion $g_x : y \mapsto f(x,y)$ (nach y) ableitet.

Partielle Ableitungen

Merke

Man erhält $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, indem man jeweils für feste y die Funktion $h_y : x \mapsto f(x,y)$ (nach x) ableitet.

Man erhält $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, indem man jeweils für feste x die Funktion $g_x : y \mapsto f(x,y)$ (nach y) ableitet.

Also:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}h_y(x)}{\mathrm{d}x} \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}g_x(y)}{\mathrm{d}y}$$

Beispiel

Wie lauten die partiellen Ableitungen von f mit

$$f(x,y) := \sin(x) \cdot y + x \cdot \cos(y) \ ?$$

Beispiel

Wie lauten die partiellen Ableitungen von f mit

$$f(x, y) := \sin(x) \cdot y + x \cdot \cos(y) \ ?$$

Antwort

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \cos(x) \cdot y + \cos(y)$$

Beispiel

Wie lauten die partiellen Ableitungen von f mit

$$f(x, y) := \sin(x) \cdot y + x \cdot \cos(y) \text{ ?}$$

Antwort

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \cos(x) \cdot y + \cos(y)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \sin(x) - x \cdot \sin(y)$$

Partielle Ableitungen

Es sei nun f eine Funktion in d Variablen $x_1, \dots, x_d$.

Partielle Ableitungen

Es sei nun f eine Funktion in d Variablen $x_1, \ldots, x_d$.

Analog zu dem Obigen kann man für $i = 1, \ldots, d$ die **partielle Ableitung nach der i-ten Variablen**

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f = \partial_i f = f_{x_i} = D_{x_i} f = D_i f$$

definieren.

Partielle Ableitungen

Es sei nun f eine Funktion in d Variablen $x_1, \ldots, x_d$.

Analog zu dem Obigen kann man für $i = 1, \ldots, d$ die **partielle Ableitung nach der i-ten Variablen**

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f = \partial_i f = f_{x_i} = D_{x_i} f = D_i f$$

definieren.

Kurz: Für $i = 1$ fasst man die Variablen $x_2, \ldots, x_d$ als feste Parameter auf und leitet nach x_1 ab.

Partielle Ableitungen

Es sei nun f eine Funktion in d Variablen $x_1, \ldots, x_d$.

Analog zu dem Obigen kann man für $i = 1, \ldots, d$ die **partielle Ableitung nach der i-ten Variablen**

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f = \partial_i f = f_{x_i} = D_{x_i} f = D_i f$$

definieren.

Kurz: Für $i = 1$ fasst man die Variablen $x_2, \ldots, x_d$ als feste Parameter auf und leitet nach x_1 ab.

Analog für andere i.

Partielle Ableitungen und Stetigkeit

Wenn eine Funktion in einer Variablen an einer Stelle differenzierbar ist, ist sie dort auch stetig.

Frage. Gilt die folgende Aussage?

Es sei eine Funktion f in zwei Variablen x, y und ein Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ gegeben, wobei die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})$ und $\partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})$ existieren.

Dann ist die Funktion stetig an $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Partielle Ableitungen und Stetigkeit

Wenn eine Funktion in einer Variablen an einer Stelle differenzierbar ist, ist sie dort auch stetig.

Frage. Gilt die folgende Aussage?

Es sei eine Funktion f in zwei Variablen x, y und ein Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ gegeben, wobei die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})$ und $\partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})$ existieren.

Dann ist die Funktion stetig an $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Antwort. Nein, nicht notwendigerweise!

Partielle Ableitungen und Stetigkeit

Sei f auf $\mathbb{R}^2$ definiert mit

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(0,0) := 0 \ .$$

Partielle Ableitungen und Stetigkeit

Sei f auf $\mathbb{R}^2$ definiert mit

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(0,0) := 0 \; .$$

Wir betrachten die Funktion am Nullpunkt. Es ist

$$f(x,0) = 0 \quad , \quad f(0,y) = 0 \; .$$

Partielle Ableitungen und Stetigkeit

Sei f auf $\mathbb{R}^2$ definiert mit

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(0,0) := 0 \ .$$

Wir betrachten die Funktion am Nullpunkt. Es ist

$$f(x,0) = 0 \quad , \quad f(0,y) = 0 \ .$$

Somit ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Partielle Ableitungen und Stetigkeit

Sei f auf $\mathbb{R}^2$ definiert mit

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(0,0) := 0 \;.$$

Wir betrachten die Funktion am Nullpunkt. Es ist

$$f(x,0) = 0 \quad , \quad f(0,y) = 0 \;.$$

Somit ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Die Funktion ist aber an $(0,0)$ nicht stetig, denn:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

Partielle Ableitungen

Wir brauchen einen Begriff der Ableitung, der nicht nur die zwei Koordinatenrichtungen betrachtet.

Die lineare Approximation

Wir betrachten lineare Funktionen in einer Variablen, das sind Funktionen der Form

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; x \mapsto ax + c$$

mit Konstanten a und c.

Die lineare Approximation

Wir betrachten lineare Funktionen in einer Variablen, das sind Funktionen der Form

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,,\; x \mapsto ax + c$$

mit Konstanten a und c.

Die Konstanten (und damit so eine Funktion) sind eindeutig bestimmt durch den Wert und die Ableitung von f an einer einzigen Stelle $x^{(0)}$:

$$\begin{aligned} & f(x) \\ = \quad & f(x) - f(x^{(0)}) + f(x^{(0)}) \\ = \quad & a(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)}) \\ = \quad & f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + f(x^{(0)}) \end{aligned}$$

Die lineare Approximation

Es sei nun die Funktion in einer Variablen f differenzierbar an $x^{(0)}$. Dann kann f "um $x^{(0)}$ herum" durch die lineare Funktion

$$\ell : x \mapsto f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

approximiert werden.

Die lineare Approximation

Es sei nun die Funktion in einer Variablen f differenzierbar an $x^{(0)}$. Dann kann f "um $x^{(0)}$ herum" durch die lineare Funktion

$$\ell : x \mapsto f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

approximiert werden.

Genauer: Wir betrachten die Differenz der beiden Funktionen:

$$f(x) - \ell(x) = \quad f(x) - (f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + f(x^{(0)}))$$

Die lineare Approximation

Es sei nun die Funktion in einer Variablen f differenzierbar an $x^{(0)}$. Dann kann f "um $x^{(0)}$ herum" durch die lineare Funktion

$$\ell : x \mapsto f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

approximiert werden.

Genauer: Wir betrachten die Differenz der beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) - \ell(x) = & \quad f(x) - (f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})) \\ = & \quad (f(x) - f(x^{(0)})) - f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) \end{aligned}$$

Die lineare Approximation

Es sei nun die Funktion in einer Variablen f differenzierbar an $x^{(0)}$. Dann kann f "um $x^{(0)}$ herum" durch die lineare Funktion

$$\ell : x \mapsto f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

approximiert werden.

Genauer: Wir betrachten die Differenz der beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) - \ell(x) = & \quad f(x) - (f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})) \\ = & \quad (f(x) - f(x^{(0)})) - f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) \end{aligned}$$

Dies wird für "x nahe $x^{(0)}$" wirklich "sehr klein".

Die lineare Approximation

Die Differenz

$$\begin{aligned} f(x) - \ell(x) = & \quad f(x) - (f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})) \\ = & \quad (f(x) - f(x^{(0)})) - f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) \end{aligned}$$

konvergiert nicht nur gegen 0, sondern auch, wenn wir es noch durch $x - x^{(0)}$ teilen:

$$\frac{f(x) - \ell(x)}{x - x^{(0)}} = \frac{f(x) - f(x^{(0)})}{x - x^{(0)}} - f'(x^{(0)}) \longrightarrow 0$$

für $x \longrightarrow x^{(0)}$.

Die lineare Approximation

Definition. Sei f eine Funktion in einer Variablen und $x^{(0)} \in D_f$. Eine **lineare Approximation** an f an der Stelle $x^{(0)}$ ist eine lineare Funktion ℓ mit:

$$f(x^{(0)}) = \ell(x^{(0)}) \quad , \quad \lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - x^{(0)}} = 0 \, .$$

Die lineare Approximation

Satz. Es sei f eine Funktion in einer Variablen und $x^{(0)} \in D_f$.

Dann ist f genau dann differenzierbar an $x^{(0)}$, wenn f eine lineare Approximation von f in $x^{(0)}$ hat.

Wenn dies der Fall ist, ist die lineare Approximation gegeben durch:

$$x \mapsto f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

Die lineare Approximation

Beweis.

Wir wissen schon:

Wenn f an $x^{(0)}$ differenzierbar ist, ist

$$x \mapsto f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

eine lineare Approximation von f in $x^{(0)}$.

Die lineare Approximation

Es existiere umgekehrt eine lineare Approximation

$$\ell : x \mapsto a \cdot x + c$$

an f in $x^{(0)}$.

Die lineare Approximation

Es existiere umgekehrt eine lineare Approximation

$$\ell : x \mapsto a \cdot x + c$$

an f in $x^{(0)}$.

Wir schreiben

$$\ell(x) = a \cdot (x - x^{(0)}) + (c + ax^{(0)}) = a \cdot (x - x^{(0)}) + c'$$

Die lineare Approximation

Es existiere umgekehrt eine lineare Approximation

$$\ell : x \mapsto a \cdot x + c$$

an f in $x^{(0)}$.

Wir schreiben

$$\ell(x) = a \cdot (x - x^{(0)}) + (c + ax^{(0)}) = a \cdot (x - x^{(0)}) + c'$$

und erhalten: $c' = f(x^{(0)})$.

Die lineare Approximation

Es existiere umgekehrt eine lineare Approximation

$$\ell : x \mapsto a \cdot x + c$$

an f in $x^{(0)}$.

Wir schreiben

$$\ell(x) = a \cdot (x - x^{(0)}) + (c + ax^{(0)}) = a \cdot (x - x^{(0)}) + c'$$

und erhalten: $c' = f(x^{(0)})$.

$$\Longrightarrow 0 = \lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - x^{(0)}}$$

Die lineare Approximation

Es existiere umgekehrt eine lineare Approximation

$$\ell : x \mapsto a \cdot x + c$$

an f in $x^{(0)}$.

Wir schreiben

$$\ell(x) = a \cdot (x - x^{(0)}) + (c + ax^{(0)}) = a \cdot (x - x^{(0)}) + c'$$

und erhalten: $c' = f(x^{(0)})$.

$$\Longrightarrow 0 = \lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - x^{(0)}} = \lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \left(\frac{f(x) - f(x^{(0)})}{x - x^{(0)}} - a\right)$$

Die lineare Approximation

Es existiere umgekehrt eine lineare Approximation

$$\ell : x \mapsto a \cdot x + c$$

an f in $x^{(0)}$.

Wir schreiben

$$\ell(x) = a \cdot (x - x^{(0)}) + (c + ax^{(0)}) = a \cdot (x - x^{(0)}) + c'$$

und erhalten: $c' = f(x^{(0)})$.

$$\Longrightarrow 0 = \lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - x^{(0)}} = \lim_{x \longrightarrow x^{(0)}} \left(\frac{f(x) - f(x^{(0)})}{x - x^{(0)}} - a\right)$$

Also ist f an $x^{(0)}$ differenzierbar mit $f'(x^{(0)}) = a$.

Die lineare Approximation

Eine **lineare Funktion in zwei Variablen** ist eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x, y) \mapsto ax + by + c\ .$$

Die lineare Approximation

Eine **lineare Funktion in zwei Variablen** ist eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x, y) \mapsto ax + by + c\ .$$

Es ist

$$\partial_x f = a \quad , \quad \partial_y f = b\,,$$

also

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) = a \quad , \quad \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) = b$$

Die lineare Approximation

Eine **lineare Funktion in zwei Variablen** ist eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x,y) \mapsto ax + by + c\ .$$

Es ist

$$\partial_x f = a \quad , \quad \partial_y f = b\,,$$

also

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) = a \quad , \quad \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) = b$$

und

$$f(x,y) = (f(x,y) - f(x^{(0)}, y^{(0)})) + f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

Die lineare Approximation

Eine **lineare Funktion in zwei Variablen** ist eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y) \mapsto ax + by + c\ .$$

Es ist

$$\partial_x f = a \quad , \quad \partial_y f = b\ ,$$

also

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) = a \quad , \quad \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) = b$$

und

$$f(x,y) = (f(x,y) - f(x^{(0)}, y^{(0)})) + f(x^{(0)}, y^{(0)}) =$$

$$a(x - x^{(0)}) + b(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

Die lineare Approximation

Eine **lineare Funktion in zwei Variablen** ist eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x, y) \mapsto ax + by + c\ .$$

Es ist

$$\partial_x f = a \quad , \quad \partial_y f = b\ ,$$

also

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) = a \quad , \quad \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) = b$$

und

$$f(x, y) = (f(x, y) - f(x^{(0)}, y^{(0)})) + f(x^{(0)}, y^{(0)}) =$$

$$a(x - x^{(0)}) + b(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)}, y^{(0)}) =$$

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (y - y^{(0)}) + f(x^{(0)}, y^{(0)})\ .$$

Die lineare Approximation

Definition. Sei f eine Funktion in zwei Variablen und $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in D_f$. Eine **lineare Approximation** an f an der Stelle $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ist eine lineare Funktion ℓ mit

$$f(x^{(0)}, y^{(0)}) = \ell(x^{(0)}, y^{(0)})$$

und

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x^{(0)},y^{(0)})} \frac{f(x,y) - \ell(x,y)}{\|(x,y) - (x^{(0)}, y^{(0)})\|} = 0 \,.$$

Differenzierbarkeit

Voraussetzung. Ab nun betrachten wir nur Funktionen $D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$$D_f \subseteq \mathbb{R}^d$$

Differenzierbarkeit

Voraussetzung. Ab nun betrachten wir nur Funktionen $D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$$D_f \subseteq \mathbb{R}^d$$

und

für jeden Punkt $\underline{x} \in D_f$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\overline{U}_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq D_f \ .$$

Differenzierbarkeit

Voraussetzung. Ab nun betrachten wir nur Funktionen $D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$$D_f \subseteq \mathbb{R}^d$$

und

für jeden Punkt $\underline{x} \in D_f$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\overline{U}_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq D_f \ .$$

Man kann sagen: Der Definitionsbereich hat **keinen Rand**. Man kann von jedem Punkt aus in jede Richtung gehen.

Die lineare Approximation

Satz. Es sei f eine Funktion in zwei Variablen (mit D_f ohne Rand) und $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in D_f$.

Wenn nun f eine lineare Approximation ℓ an $x^{(0)}$ hat, existieren die beiden partiellen Ableitungen und ℓ ist gegeben durch

$$\ell(x,y) = \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (y - y^{(0)}) + f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

Außerdem ist die Funktion dann stetig an $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Die lineare Approximation

Definition. Die Funktion f heißt **differenzierbar** an $(x^{(0)}, y^{(0)})$, wenn sie dort eine lineare Approximaton hat.

Die lineare Approximation

Definition. Die Funktion f heißt **differenzierbar** an $(x^{(0)}, y^{(0)})$, wenn sie dort eine lineare Approximaton hat.

Somit gilt:

Eine Funktion in zwei Variablen ist genau dann differenzierbar an einem Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$, wenn dort die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})$ und $\partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})$ existieren und

$$(x, y) \mapsto \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})(x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})(y - y^{(0)}) + f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

eine lineare Approximation an f am Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ist.

Differenzierbarkeit

Definition. Eine Funktion f heißt **differenzierbar**, wenn sie an allen Punkten aus D_f differenzierbar ist.

Ein wichtiger Satz

Satz. Es sei f eine Funktion in zwei Variablen (mit D_f ohne Rand). Wenn nun die beiden partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind, dann ist f differenzierbar.

Ein wichtiger Satz

Satz. Es sei f eine Funktion in zwei Variablen (mit D_f ohne Rand). Wenn nun die beiden partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind, dann ist f differenzierbar.

Definition. Eine Funktion wie im Satz heißt **stetig differenzierbar**.

Ein wichtiger Satz

Satz. Es sei f eine Funktion in zwei Variablen (mit D_f ohne Rand). Wenn nun die beiden partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind, dann ist f differenzierbar.

Definition. Eine Funktion wie im Satz heißt **stetig differenzierbar**.

Diesen Satz und die Definition sollten Sie sich merken!

Das totale Differential

Es sei f differenzierbar.

Das totale Differential

Es sei f differenzierbar.

Wir haben gesehen, dass für "x nahe $x^{(0)}$" die Differenz zwischen

$$f(x)$$

und

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})(x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})(y - y^{(0)}) + f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

"sehr klein" ist.

Entsprechend zwischen

$$f(x) - f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

und

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})(x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})(y - y^{(0)}) \; .$$

Das totale Differential

Wir können schreiben:

$$f(x) - f(x^{(0)}, y^{(0)}) \approx \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})(x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})(y - y^{(0)})$$

Das totale Differential

Wir können schreiben:

$$f(x)-f(x^{(0)},y^{(0)}) \approx \partial_x f(x^{(0)},y^{(0)})(x-x^{(0)})+\partial_y f(x^{(0)},y^{(0)})(y-y^{(0)})$$

Mit $\Delta x := x - x^{(0)},\ \Delta y := y - y^{(0)}$:

$$f(x^{(0)}+\Delta x, y^{(0)}+\Delta y)-f(x^{(0)},y^{(0)}) \approx \partial_x f(x^{(0)},y^{(0)})\,\Delta x+\partial_y f(x^{(0)},y^{(0)})$$

Das totale Differential

Wir können schreiben:

$$f(x) - f(x^{(0)}, y^{(0)}) \approx \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})(x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})(y - y^{(0)})$$

Mit $\Delta x := x - x^{(0)},\ \Delta y := y - y^{(0)}$:

$$f(x^{(0)} + \Delta x, y^{(0)} + \Delta y) - f(x^{(0)}, y^{(0)}) \approx \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})\,\Delta x + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

kurz:

$$\Delta f \approx \partial_x f\,\Delta x + \partial_y f\,\Delta y$$

Das totale Differential

$$\Delta f \approx \partial_x f \, \Delta x + \partial_y f \, \Delta y$$

Das totale Differential

$$\Delta f \approx \partial_x f \, \Delta x + \partial_y f \, \Delta y$$

Idee von Leibniz (bitte nicht wörtlich nehmen):

Wir ersetzen $\Delta x, \Delta y$ und Δf durch (betragsmäßig) "unendlich kleine" Größen. Diese nennen wir **Differentiale**. Für diese Differentiale sind beide Seiten gleich.

Das totale Differential

$$\Delta f \approx \partial_x f \, \Delta x + \partial_y f \, \Delta y$$

Idee von Leibniz (bitte nicht wörtlich nehmen):

Wir ersetzen $\Delta x, \Delta y$ und Δf durch (betragsmäßig) “unendlich kleine” Größen. Diese nennen wir **Differentiale**. Für diese Differentiale sind beide Seiten gleich.

Wir erhalten:

$$\mathrm{d}f = \partial_x f \, \mathrm{d}x + \partial_y f \, \mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x} \, \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}y$$

Richtungsableitungen

Es sei f wieder eine Funktion in zwei Variablen x, y und $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ein Punkt.

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

ist eine Ableitung "entlang der x-Achse".

Entsprechend ist

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

eine Ableitung "entlang der y-Achse".

Richtungsableitungen

Man kann also sagen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \partial_x f(x^{(0)},y^{(0)})$$

ist eine Ableitung "in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$".

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \partial_y f(x^{(0)},y^{(0)})$$

ist eine Ableitung "in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$".

Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}+h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}+h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}+1\cdot h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}+h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}+1\cdot h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f((x^{(0)}, y^{(0)}) + h\cdot(1,0)) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}+h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}+1\cdot h, y^{(0)}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f((x^{(0)}, y^{(0)}) + h\cdot(1,0)) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f((x^{(0)}, y^{(0)}) + h\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}, y^{(0)} + h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}, y^{(0)}+h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}+0\cdot h, y^{(0)}+1\cdot h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}, y^{(0)} + h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + 0\cdot h, y^{(0)} + 1\cdot h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f((x^{(0)}, y^{(0)}) + h\cdot(0,1)) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)},y^{(0)}+h)-f(x^{(0)},y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)}+0\cdot h, y^{(0)}+1\cdot h)-f(x^{(0)},y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f((x^{(0)},y^{(0)})+h\cdot(0,1))-f(x^{(0)},y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f((x^{(0)},y^{(0)})+h\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})-f(x^{(0)},y^{(0)})}{h}$$

Richtungsableitungen

Wir fixieren nun einen beliebigen Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

der Länge 1, d.h. mit $r_x^2 + r_y^2 = 1$.

Richtungsableitungen

Wir fixieren nun einen beliebigen Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

der Länge 1, d.h. mit $r_x^2 + r_y^2 = 1$.

Dies können wir als **Richtung** auffassen.

Wir wollen f an $(x^{(0)}, y^{(0)})$ **in diese Richtung ableiten**.

Richtungsableitungen

Definition. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + r_x h, y^{(0)} + r_y h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f((x^{(0)}, y^{(0)}) + h \cdot \vec{r}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennen wir ihn die **Ableitung in Richtung** $\vec{r}$ (oder durch $\vec{r}$ definierte **Richtungsableitung** von f an $(x^{(0)}, y^{(0)})$).

Richtungsableitungen

Definition. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + r_x h, y^{(0)} + r_y h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f((x^{(0)}, y^{(0)}) + h \cdot \vec{r}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennen wir ihn die **Ableitung in Richtung** $\vec{r}$ (oder durch $\vec{r}$ definierte **Richtungsableitung** von f an $(x^{(0)}, y^{(0)})$).

Bezeichnung:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \vec{r}}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \partial_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)}) = D_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

Richtungsableitungen

Definition. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x^{(0)} + r_x h, y^{(0)} + r_y h) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f((x^{(0)}, y^{(0)}) + h \cdot \vec{r}) - f(x^{(0)}, y^{(0)})}{h}$$

existiert, so nennen wir ihn die **Ableitung in Richtung** $\vec{r}$ (oder durch $\vec{r}$ definierte **Richtungsableitung** von f an $(x^{(0)}, y^{(0)})$).

Bezeichnung:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{r}}\Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} = \partial_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)}) = D_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

Wenn die Ableitung in Richtung $\vec{r}$ an jedem Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ von D_f existiert, erhalten wir die Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \partial_{\vec{r}} f = D_{\vec{r}} f$$

Richtungsableitungen

Die Formel

$$\partial_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)}) = r_x \cdot \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) + r_y \cdot \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

liegt nahe.

Richtungsableitungen

Satz. Wenn f an $(x^{(0)}, y^{(0)})$ differenzierbar ist, ist

$$\partial_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)}) = r_x \cdot \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) + r_y \cdot \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \ .$$

Richtungsableitungen

Satz. Wenn f an $(x^{(0)}, y^{(0)})$ differenzierbar ist, ist

$$\partial_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)}) = r_x \cdot \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) + r_y \cdot \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \ .$$

Korollar. Wenn f stetig differenzierbar ist (d.h. die partiellen Ableitungen existieren und sind stetig), ist

$$\partial_{\vec{r}} f = r_x \cdot \partial_x f + r_y \cdot \partial_y f \ .$$

Das Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** von zwei Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

ist

$$\vec{v} \bullet \vec{w} := v_x w_x + v_y w_y \ .$$

Das Skalarprodukt

Im $\mathbb{R}^d$. Das Skalarprodukt von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$$

ist

$$\vec{v} \bullet \vec{w} := v_1 w_1 + \cdots v_d w_d = \sum_{i=1}^{d} v_i w_i$$

Das Skalarprodukt

Im $\mathbb{R}^d$. Das Skalarprodukt von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$$

ist

$$\vec{v} \bullet \vec{w} := v_1 w_1 + \cdots v_d w_d = \sum_{i=1}^{d} v_i w_i$$

[Für $\vec{v}, \vec{w}$ können wir auch $\underline{v}, \underline{w}$ schreiben. Dann ist

$$\underline{v} \bullet \underline{w} = v_1 w_1 + \cdots v_d w_d = \sum_{i=1}^{d} v_i w_i \ .]$$

Das Skalarprodukt

Wichtige Tatsachen zum Skalarprodukt

- Es ist
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$$

Das Skalarprodukt

Wichtige Tatsachen zum Skalarprodukt

- Es ist
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$$

- Das Skalarprodukt ist invariant unter Drehungen. D.h.: Seien zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gegeben (wie immer vom Nullpunkt ausgehend). Wir drehen nun den $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt. [Alternativ: Wir drehen das Koordinatensystem in die entgegengesetzte Richtung.]

Das Skalarprodukt

Wichtige Tatsachen zum Skalarprodukt

- Es ist
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$$
- Das Skalarprodukt ist invariant unter Drehungen. D.h.: Seien zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gegeben (wie immer vom Nullpunkt ausgehend). Wir drehen nun den $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt. [Alternativ: Wir drehen das Koordinatensystem in die entgegengesetzte Richtung.]
Wir erhalten zwei neue Vektoren $\vec{v}'$ und $\vec{w}'$.
Nun ist
$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{v}' \bullet \vec{w}' \ .$$

Das Skalarprodukt

Wichtige Tatsachen zum Skalarprodukt.

- Es ist

$$\vec{v} \bullet \vec{w} =$$

$$\|\vec{v}\| \cdot (\text{Projektion von } \vec{w} \text{ auf } \vec{v} \text{ als Zahl mit Vorzeichen}) =$$

$$\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\text{eingeschlossener Winkel})$$

Das Skalarprodukt

Wichtige Tatsachen zum Skalarprodukt.

- Es ist

  $$\vec{v} \bullet \vec{w} =$$

  $$\|\vec{v}\| \cdot (\text{Projektion von } \vec{w} \text{ auf } \vec{v} \text{ als Zahl mit Vorzeichen}) =$$

  $$\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\text{eingeschlossener Winkel})$$

- Wir fixieren einen Vektor $\vec{v}$. Wir betrachten nun Richtungsvektoren $\vec{r}$ (Vektoren mit Länge 1). Es ist

  $$\vec{r} \bullet \vec{v} = \text{Projektion von } \vec{v} \text{ auf } \vec{r}$$

Das Skalarprodukt

Wichtige Tatsachen zum Skalarprodukt.

- Es ist

  $\vec{v} \bullet \vec{w} =$

  $\|\vec{v}\| \cdot$ (Projektion von $\vec{w}$ auf $\vec{v}$ als Zahl mit Vorzeichen) $=$

  $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\text{eingeschlossener Winkel})$

- Wir fixieren einen Vektor $\vec{v}$. Wir betrachten nun Richtungsvektoren $\vec{r}$ (Vektoren mit Länge 1). Es ist

  $$\vec{r} \bullet \vec{v} = \text{Projektion von } \vec{v} \text{ auf } \vec{r}$$

  Somit:

  - Wenn $\vec{r}$ in dieselbe Richtung wie $\vec{v}$ zeigt, ist $\vec{r} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|$.

Das Skalarprodukt

Wichtige Tatsachen zum Skalarprodukt.

- Es ist

  $$\vec{v} \bullet \vec{w} =$$

  $$\|\vec{v}\| \cdot (\text{Projektion von } \vec{w} \text{ auf } \vec{v} \text{ als Zahl mit Vorzeichen}) =$$

  $$\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\text{eingeschlossener Winkel})$$

- Wir fixieren einen Vektor $\vec{v}$. Wir betrachten nun Richtungsvektoren $\vec{r}$ (Vektoren mit Länge 1). Es ist

  $$\vec{r} \bullet \vec{v} = \text{Projektion von } \vec{v} \text{ auf } \vec{r}$$

  Somit:

  - Wenn $\vec{r}$ in dieselbe Richtung wie $\vec{v}$ zeigt, ist $\vec{r} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|$.
  - Wenn die beiden Vektoren orthogonal zueinander sind, ist $\vec{r} \bullet \vec{v} = 0$.

Der Gradient

Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen x, y.

Der **Gradient** von f ist

$$\operatorname{Grad}(f) = \nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{„Nabla von } f\text{“ .}$$

Der Gradient

Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen x, y.

Der **Gradient** von f ist

$$\mathrm{Grad}(f) = \nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{„Nabla von } f\text{“ .}$$

Wenn nun $\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$ eine Richtung, d.h. ein Vektor mit Länge 1, ist, ist

$$\partial_{\vec{r}} f = r_x \cdot \partial_x f + r_y \cdot \partial_y f = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{r} \bullet \nabla f \ .$$

Das Gradient

$$\partial_{\vec{r}} f = r_x \cdot \partial_x f + r_y \cdot \partial_y f = \begin{pmatrix} r_x \\ \\ r_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{r} \bullet \nabla f \ .$$

Das Gradient

$$\partial_{\vec{r}} f = r_x \cdot \partial_x f + r_y \cdot \partial_y f = \begin{pmatrix} r_x \\ \\ r_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{r} \bullet \nabla f \ .$$

- Wenn an einem Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ der Richtungsvektor $\vec{r}$ in dieselbe Richtung wie der Gradient zeigt, ist

$$\partial_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)}) = \|\nabla f(x^{(0)}, y^{(0)})\| \ .$$

Das Gradient

$$\partial_{\vec{r}} f = r_x \cdot \partial_x f + r_y \cdot \partial_y f = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{r} \bullet \nabla f \ .$$

- Wenn an einem Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ der Richtungsvektor $\vec{r}$ in dieselbe Richtung wie der Gradient zeigt, ist

$$\partial_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)}) = \|\nabla f(x^{(0)}, y^{(0)})\| \ .$$

- Wenn der Richtungsvektor orthogonal zum Gradienten ist, ist

$$\partial_{\vec{r}} f(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0 \ .$$

Der Gradient

Interpretation. Der Gradient gibt an, in welche Richtung es am "stärksten bergauf" geht und wie stark es bergauf geht.

Der Gradient

Interpretation. Der Gradient gibt an, in welche Richtung es am "stärksten bergauf" geht und wie stark es bergauf geht.

Wenn wir in diese Richtung gehen, gehen wir am steilsten nach oben, die Steigung des Weges ist maximal unter allen Richtungen.

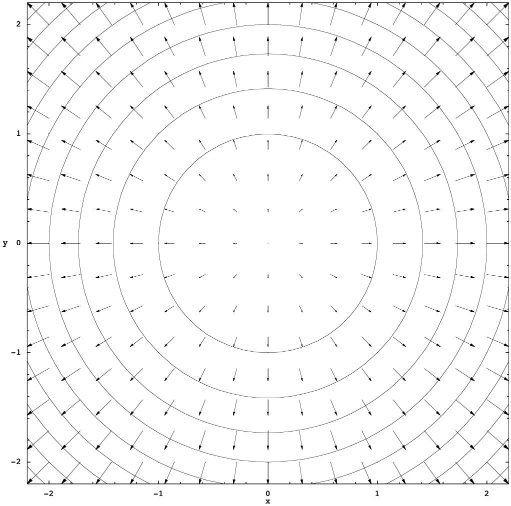
Der Gradient

Interpretation. Der Gradient gibt an, in welche Richtung es am “stärksten bergauf” geht und wie stark es bergauf geht.

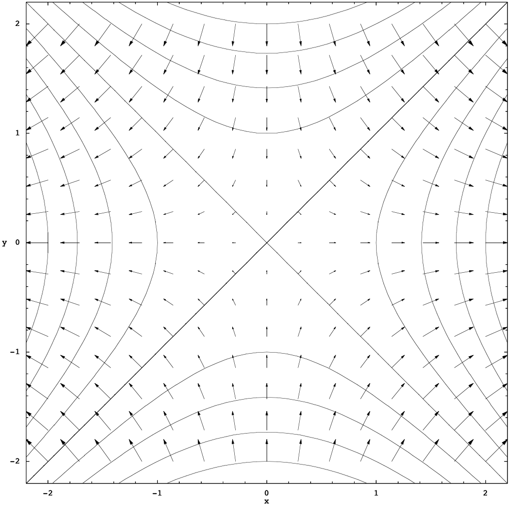
Wenn wir in diese Richtung gehen, gehen wir am steilsten nach oben, die Steigung des Weges ist maximal unter allen Richtungen.

Wenn wir orthogonal hierzu gehen, verändern wir die Höhe nicht, d.h. wir bleiben auf der Höhenlinie.

Examples of gradient vectors and level curves



$f(x,y) = x^2 + y^2$



$f(x,y) = x^2 - y^2$

Der Gradient

Sei nun f eine stetig differenzierbare Funktion in d Variablen $x_1, \ldots, x_d$.

Der **Gradient** von f ist $\mathrm{Grad}(f) = \nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d} \end{pmatrix}$.

Der Gradient

Sei nun f eine stetig differenzierbare Funktion in d Variablen $x_1, \ldots, x_d$.

Der **Gradient** von f ist $\mathrm{Grad}(f) = \nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d} \end{pmatrix}$. Wenn $\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$ eine Richtung, d.h. ein Vektor mit Länge 1, ist, ist

$$\partial_{\vec{r}} f = r_1 \cdot \partial_{x_1} f + \cdots + r_d \cdot \partial_{x_d} f = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d} \end{pmatrix} = \vec{r} \bullet \nabla f \ .$$

Die Tangente

Wir geben uns wieder eine stetig differenzierbare Funktion f in zwei Variablen x, y vor.

Die Tangente

Wir geben uns wieder eine stetig differenzierbare Funktion f in zwei Variablen x, y vor.

Es sei $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ein Punkt im Definitionsbereich. Wir nehmen an, dass $(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Die Tangente

Wir geben uns wieder eine stetig differenzierbare Funktion f in zwei Variablen x, y vor.

Es sei $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ein Punkt im Definitionsbereich. Wir nehmen an, dass $(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Dies bedeutet: In Richtung von ∇f steigt die Funktion f an, und in diese Richtung ist der Anstieg maximal.

Die Tangente

Wir geben uns wieder eine stetig differenzierbare Funktion f in zwei Variablen x, y vor.

Es sei $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ein Punkt im Definitionsbereich. Wir nehmen an, dass $(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Dies bedeutet: In Richtung von ∇f steigt die Funktion f an, und in diese Richtung ist der Anstieg maximal.

Die Höhenlinie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = f(x^{(0)}, y^{(0)})\}$$

verläuft in $(x^{(0)}, y^{(0)})$ orthogonal zu ∇f.

Die Tangente

Wir geben uns wieder eine stetig differenzierbare Funktion f in zwei Variablen x, y vor.

Es sei $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ein Punkt im Definitionsbereich. Wir nehmen an, dass $(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Dies bedeutet: In Richtung von ∇f steigt die Funktion f an, und in diese Richtung ist der Anstieg maximal.

Die Höhenlinie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = f(x^{(0)}, y^{(0)})\}$$

verläuft in $(x^{(0)}, y^{(0)})$ orthogonal zu ∇f.

Also steht $(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)})$ senkrecht auf auf der Höhenlinie durch $(x^{(0)}, y^{(0)})$. So ein Vektor heißt **Normalenvektor**.

Die Tangente

Die **Tangente** an die Höhenlinie

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = f(x^{(0)}, y^{(0)})\}$$

ist die Gerade, die auch durch $f(x^{(0)}, y^{(0)})$ verläuft und senkrecht zu $(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)})$ ist.

Die Tangente

Die **Tangente** an die Höhenlinie

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = f(x^{(0)}, y^{(0)})\}$$

ist die Gerade, die auch durch $f(x^{(0)}, y^{(0)})$ verläuft und senkrecht zu $(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)})$ ist. Man kann sie angeben durch:

- Eine Gleichung in x und y
- In parametrisierter Form

$$\{P^{(0)} + t\vec{\gamma} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Die Tangente

Angabe eine Gleichung

Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann auf der Tangente, wenn der Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix}$$

orthogonal zu $(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)})$ ist.

Dies bedeutet:

$$(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) \bullet \begin{pmatrix} x - x^{(0)} \\ y - y^{(0)} \end{pmatrix} = 0$$

Die Tangente

$$(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) \bullet \begin{pmatrix} x - x^{(0)} \\ y - y^{(0)} \end{pmatrix} = 0$$

Die Tangente

$$(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) \bullet \begin{pmatrix} x - x^{(0)} \\ y - y^{(0)} \end{pmatrix} = 0$$

D.h.

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (y - y^{(0)}) = 0\ .$$

Die Tangente

$$(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) \bullet \begin{pmatrix} x - x^{(0)} \\ y - y^{(0)} \end{pmatrix} = 0$$

D.h.

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (y - y^{(0)}) = 0 \; .$$

Umgeschrieben:

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot x + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot y =$$
$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot x^{(0)} + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot y^{(0)} \; .$$

Die Tangente

Alternativer Ansatz mittels der linearen Approximation

Die lineare Approximation an $(x^{(0)}, y^{(0)})$ lautet

$$\ell : (x, y) \mapsto \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (y - y^{(0)}) \\ + f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

Es ist

$$\nabla \ell = (\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) \ ,$$

die Höhenlinien von ℓ sind Geraden, die parallel zur Tangente an f in $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Also ist die Tangente durch

$$\ell(x, y) = f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

gegeben.

Die Tangente

Explizit:

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (y - y^{(0)}) + f(x^{(0)}, y^{(0)})$$
$$= f(x^{(0)}, y^{(0)})$$

Dies führt auch auf:

$$\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) + \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \cdot (y - y^{(0)}) = 0$$

Die Tangente

Parametrisierte Form

Wir suchen einen Vektor $\vec{r}$, der orthogonal zu

$$(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ \\ \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Die Tangente

Parametrisierte Form

Wir suchen einen Vektor $\vec{r}$, der orthogonal zu

$$(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

So ein Vektor ist $\begin{pmatrix} \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ -\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{pmatrix}$.

(Das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist Null.)

Die Tangente

Parametrisierte Form

Wir suchen einen Vektor $\vec{r}$, der orthogonal zu

$$(\nabla f)(x^{(0)}, y^{(0)}) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{pmatrix}$$ ist.

So ein Vektor ist $\begin{pmatrix} \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ -\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{pmatrix}$.

(Das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist Null.)

Die Tangente ist (in Spaltenschreibweise):

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \partial_y f(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ -\partial_x f(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Kettenregel

Wir geben uns eine stetig differenzierbare Funktion f in zwei Variablen x, y und eine differenzierbare Bewegung

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ t \mapsto (x(t), y(t))$$

mit $\gamma(D_\gamma) \subseteq D_f$ vor.

Die Kettenregel

Wir geben uns eine stetig differenzierbare Funktion f in zwei Variablen x, y und eine differenzierbare Bewegung

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ t \mapsto (x(t), y(t))$$

mit $\gamma(D_\gamma) \subseteq D_f$ vor. Wir haben nun die Funktion

$$f \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ t \mapsto f(\gamma(t)) \ .$$

Die Kettenregel

Wir geben uns eine stetig differenzierbare Funktion f in zwei Variablen x, y und eine differenzierbare Bewegung

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ t \mapsto (x(t), y(t))$$

mit $\gamma(D_\gamma) \subseteq D_f$ vor. Wir haben nun die Funktion

$$f \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ t \mapsto f(\gamma(t)) \ .$$

Frage. Wie lautet die Ableitung dieser Funktion?

Die Kettenregel

Spezialfall. Die Bewegung verlaufe sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Strecke. D.h. der Geschwindigkeitsvektor sei konstant. Außerdem beginne die Zeit bei $t = 0$ und die skalare Geschwindigkeit sei 1.

Die Kettenregel

Spezialfall. Die Bewegung verlaufe sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Strecke. D.h. der Geschwindigkeitsvektor sei konstant. Außerdem beginne die Zeit bei $t = 0$ und die skalare Geschwindigkeit sei 1.

Mit anderen Worten:

$$\gamma(t) = P^{(0)} + t \cdot \vec{r}$$

mit $P^{(0)} = \gamma(0)$ und $\|\vec{r}\| = 1$.

Die Kettenregel

Spezialfall. Die Bewegung verlaufe sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Strecke. D.h. der Geschwindigkeitsvektor sei konstant. Außerdem beginne die Zeit bei $t = 0$ und die skalare Geschwindigkeit sei 1.

Mit anderen Worten:

$$\gamma(t) = P^{(0)} + t \cdot \vec{r}$$

mit $P^{(0)} = \gamma(0)$ und $\|\vec{r}\| = 1$.

Nun ist

$$\gamma(t+\Delta t) = P^{(0)} + (t+\Delta t) \cdot \vec{r} = P^{(0)} + t \cdot \vec{r} + \Delta t \cdot \vec{r} = \gamma(t) + \Delta t \cdot \vec{r}\,.$$

Die Kettenregel

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}}$$

Die Kettenregel

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}+h)) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h}$$

Die Kettenregel

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}+h)) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}) + h \cdot \vec{r}) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h}$$

Die Kettenregel

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}+h)) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}) + h\cdot\vec{r}) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t^{(0)}))\ .$$

Die Kettenregel

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}+h)) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}) + h\cdot\vec{r}) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t^{(0)}))\ .$$

Also:

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t))$$

Die Kettenregel

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}+h)) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}) + h\cdot\vec{r}) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t^{(0)}))\ .$$

Also:

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t)) =$$

$$\vec{r} \bullet (\nabla f)(\gamma(t))$$

Die Kettenregel

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}+h)) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}) + h\cdot\vec{r}) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t^{(0)}))\,.$$

Also:

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t)) =$$

$$\vec{r}\bullet(\nabla f)(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)\bullet(\nabla f)(\gamma(t))$$

Die Kettenregel

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}+h)) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}) + h\cdot\vec{r}) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t^{(0)}))\ .$$

Also:

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t)) =$$

$$\vec{r}\bullet(\nabla f)(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)\bullet(\nabla f)(\gamma(t)) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\cdot\dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\cdot\dot{y}(t)$$

Die Kettenregel

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}+h)) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\gamma(t^{(0)}) + h\cdot\vec{r}) - f(\gamma(t^{(0)}))}{h} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t^{(0)}))\ .$$

Also:

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\gamma(t)) =$$

$$\vec{r}\bullet(\nabla f)(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)\bullet(\nabla f)(\gamma(t)) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\cdot\dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\cdot\dot{y}(t) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

Die Kettenregel

Sei nun

$$\gamma(t) = P^{(0)} + \vec{r}t$$

mit einem beliebigen Vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$.

Die Kettenregel

Sei nun
$$\gamma(t) = P^{(0)} + \vec{r}t$$
mit einem beliebigen Vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$.

Nun hat $\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ die Länge 1. Die Parametrisierung nach der Länge ist:
$$\widehat{\gamma}(s) = P^{(0)} + \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}s$$

Hier ist wieder die skalare Geschwindigkeit gleich 1.

Die Kettenregel

Sei nun

$$\gamma(t) = P^{(0)} + \vec{r}t$$

mit einem beliebigen Vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$.

Nun hat $\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ die Länge 1. Die Parametrisierung nach der Länge ist:

$$\widehat{\gamma}(s) = P^{(0)} + \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}s$$

Hier ist wieder die skalare Geschwindigkeit gleich 1.

Mit $s(t) = \|\vec{r}\|t$ ist

$$\gamma(t) = \widehat{\gamma}(s(t)) = \widehat{\gamma}(\|\vec{r}\|\, t)$$

Die Kettenregel

$$\gamma(t) = \widehat{\gamma}(s(t)) = \widehat{\gamma}(\|\vec{r}\|\, t)$$

Mit der normalen Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\widehat{\gamma}(s)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=s(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

Die Kettenregel

$$\gamma(t) = \widehat{\gamma}(s(t)) = \widehat{\gamma}(\|\vec{r}\|\, t)$$

Mit der normalen Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\widehat{\gamma}(s)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=s(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\widehat{\gamma}(s)) \cdot \frac{\mathrm{d}\widehat{x}(s)}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}(\widehat{\gamma}(s)) \cdot \frac{\mathrm{d}\widehat{y}(s)}{ds}\right)\Big|_{s=s(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Die Kettenregel

$$\gamma(t) = \widehat{\gamma}(s(t)) = \widehat{\gamma}(\|\vec{r}\|\ t)$$

Mit der normalen Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\widehat{\gamma}(s)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=s(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\widehat{\gamma}(s)) \cdot \frac{\mathrm{d}\widehat{x}(s)}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}(\widehat{\gamma}(s)) \cdot \frac{\mathrm{d}\widehat{y}(s)}{ds}\Big)\Big|_{s=s(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Die Kettenregel

Die Formel

$$\frac{\mathrm{d}f\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

gilt auch allgemein.

Die Kettenregel

Satz. Es sei weiterhin f eine Funktion stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen x, y. Sei ferner γ eine differenzierare Bewegung mit $\gamma(D_\gamma) \subseteq D_f$. Dann ist

$$\frac{\mathrm{d} f\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

Die Kettenregel

Satz. Es sei weiterhin f eine Funktion stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen x, y. Sei ferner γ eine differenzierare Bewegung mit $\gamma(D_\gamma) \subseteq D_f$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d} f\gamma(t)}{\mathrm{d} t} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d} x(t)}{\mathrm{d} t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d} y(t)}{\mathrm{d} t} \\
&= (\nabla f)(\gamma(t)) \bullet \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d} t}
\end{aligned}
$$

Die Kettenregel

Satz. Es sei weiterhin f eine Funktion stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen x, y. Sei ferner γ eine differenzierare Bewegung mit $\gamma(D_\gamma) \subseteq D_f$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d} f\gamma(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= (\nabla f)(\gamma(t)) \bullet \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Interpretation. Wir gehen auf einem Berg. Die Höhenzunahme (-abnahme) während der Bewegung ergibt sich wie folgt: Sie setzt sich zusammen aus der Höhenzunahme (-abnahme) wegen der Bewegung in x-Richtung und der Zunahme (Abnahme) wegen der Bewegung in y-Richtung.

Die Kettenregel

Satz. Es sei weiterhin f eine Funktion stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen x, y. Sei ferner γ eine differenzierare Bewegung mit $\gamma(D_\gamma) \subseteq D_f$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d} f\gamma(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= (\nabla f)(\gamma(t)) \bullet \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Interpretation. Wir gehen auf einem Berg. Die Höhenzunahme (-abnahme) während der Bewegung ergibt sich wie folgt: Sie setzt sich zusammen aus der Höhenzunahme (-abnahme) wegen der Bewegung in x-Richtung und der Zunahme (Abnahme) wegen der Bewegung in y-Richtung.

In jeder der beiden Richtungen nimmt die Höhe zu (ab), weil wir es erstens (in die jeweilige Richtung) eine Steigung (ein Gefälle) gibt und zweitens wir uns mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegen. Die Zunahme (Abnahme) ist proportional zu beidem.

Die Kettenregel

Man schreibt oftmals auch einfach

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \; .$$

Die Kettenregel

Man schreibt oftmals auch einfach

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \ .$$

Oder, wenn γ klar ist:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \ .$$

Mittels des totalen Differentials kann man dies wie folgt "erhalten":

Die Kettenregel

Man schreibt oftmals auch einfach

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \; .$$

Oder, wenn γ klar ist:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \; .$$

Mittels des totalen Differentials kann man dies wie folgt "erhalten":

Es ist

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y$$

Dies "teilen wir durch $\mathrm{d}t$".

Implizit definierte Funktionen

Es sei wieder f eine Funktion in zwei Variablen x, y stetig differenzierbar.

Für einen Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ setzen wir $c := f(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Wir wollen nun durch

$$f(x, y) = c$$

definierte Höhenlinine um $(x^{(0)}, y^{(0)})$ herum studieren.

Implizit definierte Funktionen

Es sei wieder f eine Funktion in zwei Variablen x, y stetig differenzierbar.

Für einen Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ setzen wir $c := f(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Wir wollen nun durch

$$f(x, y) = c$$

definierte Höhenlinine um $(x^{(0)}, y^{(0)})$ herum studieren.

Hierfür suchen wir eine Funktion g mit

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} \quad , \quad f(x, g(x)) = c \; .$$

Implizit definierte Funktionen

Es sei wieder f eine Funktion in zwei Variablen x, y stetig differenzierbar.

Für einen Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ setzen wir $c := f(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Wir wollen nun durch

$$f(x, y) = c$$

definierte Höhenlinine um $(x^{(0)}, y^{(0)})$ herum studieren.

Hierfür suchen wir eine Funktion g mit

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} \quad , \quad f(x, g(x)) = c \ .$$

Idee. Wenn der Gradient an $(x^{(0)}, y^{(0)})$ nicht Null ist und nicht in x-Richtung zeigt, haben wir eine "echte" Höhenlinie, die nicht senkrecht verläuft.

Damit sollte so ein g in einer Umgebung um $x^{(0)}$ herum existieren.

Implizit definierte Funktionen

Wir machen den folgenden Ansatz:

Für eine Funktion g mit $x^{(0)} \in D_g$ gelte

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} \quad , \quad f(x, g(x)) = c \; .$$

Was kann man dann über g sagen?

Implizit definierte Funktionen

Wir machen den folgenden Ansatz:

Für eine Funktion g mit $x^{(0)} \in D_g$ gelte

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} \quad , \quad f(x, g(x)) = c \; .$$

Was kann man dann über g sagen?

Wir versuchen es mit ableiten ...

Implizit definierte Funktionen

Wir machen den folgenden Ansatz:

Für eine Funktion g mit $x^{(0)} \in D_g$ gelte

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} \quad , \quad f(x, g(x)) = c \; .$$

Was kann man dann über g sagen?

Wir versuchen es mit ableiten ...

Wir haben hier die Bewegung $x \mapsto (x, g(x))$,

also "$t = x$".

Implizit definierte Funktionen

Wir machen den folgenden Ansatz:

Für eine Funktion g mit $x^{(0)} \in D_g$ gelte

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} \quad , \quad f(x, g(x)) = c \; .$$

Was kann man dann über g sagen?

Wir versuchen es mit ableiten ...

Wir haben hier die Bewegung $x \mapsto (x, g(x))$,

also "$t = x$".

$$0 = \frac{\mathrm{d}f(x, g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

Implizit definierte Funktionen

Wir machen den folgenden Ansatz:

Für eine Funktion g mit $x^{(0)} \in D_g$ gelte

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} \quad , \quad f(x, g(x)) = c \, .$$

Was kann man dann über g sagen?

Wir versuchen es mit ableiten ...

Wir haben hier die Bewegung $x \mapsto (x, g(x))$,

also "$t = x$".

$$0 = \frac{\mathrm{d}f(x, g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{y=g(x)} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

Beachte hier: Statt $\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$ kann man auch schreiben: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Implizit definierte Funktionen

$$0 = \frac{\mathrm{d}f(x, g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{y=g(x)} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

Implizit definierte Funktionen

$$0 = \frac{\mathrm{d}f(x, g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{y=g(x)} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

Wenn $\frac{\partial f}{\partial y}$ überall $\neq 0$ ist:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{y=g(x)}}{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{y=g(x)}}$$

Implizit definierte Funktionen

$$0 = \frac{\mathrm{d}f(x, g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{y=g(x)} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

Wenn $\frac{\partial f}{\partial y}$ überall $\neq 0$ ist:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{y=g(x)}}{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{y=g(x)}}$$

Das sollte g eindeutig bestimmen.

Implizit definierte Funktionen

$$0 = \frac{\mathrm{d}f(x, g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{y=g(x)} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

Wenn $\frac{\partial f}{\partial y}$ überall $\neq 0$ ist:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{y=g(x)}}{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{y=g(x)}}$$

Das sollte g eindeutig bestimmen.

Außerdem gilt: Wenn $\frac{\partial f}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$ ist, gilt $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ auch in einer ε-Umgebung von $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Implizit definierte Funktionen

Satz. Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen x, y, $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in D_f$ und $c := f(x^{(0)}, y^{(0)})$. Es sei ferner $\frac{\partial f}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$.

Implizit definierte Funktionen

Satz. Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen x, y, $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in D_f$ und $c := f(x^{(0)}, y^{(0)})$. Es sei ferner $\frac{\partial f}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:

Es gibt genau eine auf $[-\varepsilon + x^{(0)}, \varepsilon + x^{(0)}]$ definierte stetig differenzierbare Funktion g mit

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} \quad , \quad f(x, g(x)) = c \ .$$

Diese Funktion erfüllt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{y=g(x)}}{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{y=g(x)}} \ .$$

Sie heißt die durch $f(x, y) = c, g(x^{(0)}) = y^{(0)}$ **implizit definierte** Funktion.

Implizit definierte Funktionen

Satz. Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen x, y, $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in D_f$ und $c := f(x^{(0)}, y^{(0)})$. Es sei ferner $\frac{\partial f}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$.

Dann **gibt es** ein $\varepsilon > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:

Es gibt genau eine auf $[-\varepsilon + x^{(0)}, \varepsilon + x^{(0)}]$ definierte stetig differenzierbare Funktion g mit

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} \quad , \quad f(x, g(x)) = c \; .$$

Diese Funktion erfüllt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{y=g(x)}}{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{y=g(x)}} \; .$$

Achtung. Die Eindeutigkeit kann verloren gehen, wenn man ε zu groß wählt. Denn: Die Höhenlinie kann sich "verzweigen".

Implizit definierte Funktionen

Konsistenzcheck

Wir geben uns eine stetig differenzierbare Funktion h in einer Variablen x vor.

Wir setzen $f(x, y) := h(x) - y$ und wählen $x^{(0)} \in D_f$ und setzen $y^{(0)} := f(x^{(0)})$.

Dann ist also $f(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$. Es ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}, \frac{\partial f}{\partial y} = -1$.

Implizit definierte Funktionen

Ergebnis:

Auf einer ε-Umgebung von $x^{(0)}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion g mit

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} = h(x^{(0)}) \quad , \quad f(x, g(x)) = 0$$

Implizit definierte Funktionen

Ergebnis:

Auf einer ε-Umgebung von $x^{(0)}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion g mit

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} = h(x^{(0)}) \quad , \quad f(x, g(x)) = 0$$

Mit $f(x, y) = h(x) - y$:

$$h(x) - g(x) = 0$$

Das ist klar!

Implizit definierte Funktionen

Ergebnis:

Auf einer ε-Umgebung von $x^{(0)}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion g mit

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)} = h(x^{(0)}) \quad , \quad f(x, g(x)) = 0$$

Mit $f(x, y) = h(x) - y$:

$$h(x) - g(x) = 0$$

Das ist klar!

Die Aussage über die Ableitung lautet:

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} \; .$$

Alles stimmt!

Ableitung der Umkehrfunktion

Wir geben uns eine stetig differenzierbare Funktion h in einer Variablen y vor und setzen diesmal

$$f(x, y) := x - h(y) \; .$$

Es sei nun $y^{(0)} \in D_f$ und $x^{(0)} := h(y^{(0)})$. Dann ist also

$$f(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0 \; .$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Wir geben uns eine stetig differenzierbare Funktion h in einer Variablen y vor und setzen diesmal

$$f(x, y) := x - h(y) \ .$$

Es sei nun $y^{(0)} \in D_f$ und $x^{(0)} := h(y^{(0)})$. Dann ist also

$$f(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0 \ .$$

Es ist $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}$.

Ableitung der Umkehrfunktion

Wir geben uns eine stetig differenzierbare Funktion h in einer Variablen y vor und setzen diesmal

$$f(x,y) := x - h(y)\ .$$

Es sei nun $y^{(0)} \in D_f$ und $x^{(0)} := h(y^{(0)})$. Dann ist also

$$f(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0\ .$$

Es ist $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}$.

Somit: Wenn $\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}\big|_{y=y^{(0)}} \neq 0$ ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und auf $[-\varepsilon + x^{(0)}, x^{(0)} + \varepsilon]$ genau eine Funktion g mit

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)}$$

und

$$0 = f(x, g(x)) = x - h(g(x))\ .$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f(x, y) = x - h(y)$$

Wir haben g mit:

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)}$$

und

$$0 = f(x, g(x)) = x - h(g(x)) \text{ , d.h. } h(g(x)) = x \text{ .}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f(x, y) = x - h(y)$$

Wir haben g mit:

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)}$$

und

$$0 = f(x, g(x)) = x - h(g(x)) \text{ , d.h. } h(g(x)) = x \ .$$

Da $\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}|_{y=y^{(0)}} \neq 0$ ist, ist h auf einer Umgebung von $y^{(0)}$ injektiv. Also gibt es auf so einer Umgebung eine Umkehrfunktion. Diese ist genau g.

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f(x, y) = x - h(y)$$

Wir haben g mit:

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)}$$

und

$$0 = f(x, g(x)) = x - h(g(x)) \text{ , d.h. } h(g(x)) = x \text{ .}$$

Da $\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}|_{y=y^{(0)}} \neq 0$ ist, ist h auf einer Umgebung von $y^{(0)}$ injektiv. Also gibt es auf so einer Umgebung eine Umkehrfunktion. Diese ist genau g.

Das Wesentliche ist nun: Die Umkehrfunktion g erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f(x,y) = x - h(y)$$

Wir haben g mit:

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)}$$

und

$$0 = f(x, g(x)) = x - h(g(x)) \text{ , d.h. } h(g(x)) = x \text{ .}$$

Da $\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}|_{y=y^{(0)}} \neq 0$ ist, ist h auf einer Umgebung von $y^{(0)}$ injektiv. Also gibt es auf so einer Umgebung eine Umkehrfunktion. Diese ist genau g.

Das Wesentliche ist nun: Die Umkehrfunktion g erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}|_{y=g(x)}}{\frac{\partial f}{\partial y}|_{y=g(x)}}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f(x,y) = x - h(y)$$

Wir haben g mit:

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)}$$

und

$$0 = f(x, g(x)) = x - h(g(x)) \text{ , d.h. } h(g(x)) = x \text{ .}$$

Da $\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}\big|_{y=y^{(0)}} \neq 0$ ist, ist h auf einer Umgebung von $y^{(0)}$ injektiv. Also gibt es auf so einer Umgebung eine Umkehrfunktion. Diese ist genau g.

Das Wesentliche ist nun: Die Umkehrfunktion g erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{y=g(x)}}{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{y=g(x)}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}\big|_{y=g(x)}}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f(x,y) = x - h(y)$$

Wir haben g mit:

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)}$$

und

$$0 = f(x, g(x)) = x - h(g(x)) \text{ , d.h. } h(g(x)) = x \text{ .}$$

Da $\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}\big|_{y=y^{(0)}} \neq 0$ ist, ist h auf einer Umgebung von $y^{(0)}$ injektiv. Also gibt es auf so einer Umgebung eine Umkehrfunktion. Diese ist genau g.

Das Wesentliche ist nun: Die Umkehrfunktion g erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{y=g(x)}}{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{y=g(x)}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}\big|_{y=g(x)}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\big|_{y=g(x)}}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f(x, y) = x - h(y)$$

Wir haben g mit:

$$g(x^{(0)}) = y^{(0)}$$

und

$$0 = f(x, g(x)) = x - h(g(x)) \text{ , d.h. } h(g(x)) = x \text{ .}$$

Da $\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}\big|_{y=y^{(0)}} \neq 0$ ist, ist h auf einer Umgebung von $y^{(0)}$ injektiv. Also gibt es auf so einer Umgebung eine Umkehrfunktion. Diese ist genau g.

Das Wesentliche ist nun: Die Umkehrfunktion g erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{y=g(x)}}{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{y=g(x)}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}\big|_{y=g(x)}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\big|_{y=g(x)}}$$

Diese Aussage hatten wir schon im 1. Semester.