

Kapitel IV. Differentialrechnung in mehreren Variablen

§1 Räume

Der 3-dimensionale Raum

Wir betrachten den uns umgebenden **Raum**.

Die Intuition sagt uns:

Wenn man ausgehend von einem Punkt drei Richtungen wählt, die nicht in einer Ebene liegen, kann man jeden Punkt P durch ein 3er-Tupel (x, y, z) beschreiben, wobei x, y, z Längen sind.

Beispielsweise: $(x, y, z) = (100m, -50m, 30m)$ oder auch $(x, y, z) = (1m, 7cm, 3mm)$.

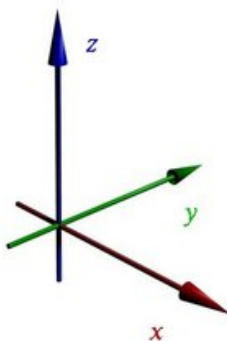
Wenn man auch noch Einheiten auf den drei Richtungen wählt, kann man jeden Punkt durch ein 3-er Tupel von Zahlen beschreiben.

Beispielsweise: $(x, y, z) = (x; y; z) = (236, 5 ; 2, 1 ; -1)$.

Der 3-dimensionale Raum

Meist wählt man die Richtungen senkrecht aufeinander und die Längen in die Richtungen identisch (z.B. 1 Meter).

Man spricht dann von einem **kartesischen Koordinatensystem** (nach René Descartes).



Dieses System ist **rechtsdrehend**.

Der 3-dimensionale Raum

Die Menge der Tupel (x, y, z) mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ ist der $\mathbb{R}^3$. Die Elemente können wir **Punkte** nennen.

Ein Punkt P ist dann also ein 3er-Tupel (x, y, z) :

$$P = (x, y, z) .$$

Bemerkung. In der Schule schreibt man oft $P(1 | -3 | 4)$, wenn man einen Punkt P mit Koordinaten $x = 1, y = -3, z = 4$ betrachten will. Das ist aber leider nicht gut!

In Ordnung ist:

$$P = (1, -3, 4) \qquad P = (1; -3; 4) \qquad P = (1 | -3 | 4)$$

Der 3-dimensionale Raum

Neben Punkten gibt es auch die Idee von **Vektoren**:

Vom Koordinatenursprung ausgehend schauen wir einen Punkt (x, y, z) an. Dann haben wir den "Pfeil" von $(0, 0, 0)$ nach (x, y, z) .

So einen Pfeil vom Ursprung aus nennen wir einen **Vektor**. Einen Vektor bezeichnet man in der Schule mit $\vec{v}$. Er ist eindeutig bestimmt durch den Endpunkt (x, y, z) . Man schreibt z.B.:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Der 3-dimensionale Raum

Es gibt keinen wesentlichen mathematischen Unterschied zwischen einem **Vektor** und einem **Punkt**: Beides ist durch ein 3er-Tupel von reellen Zahlen gegeben, also durch ein Element des $\mathbb{R}^3$.

Die Intuition ist aber eine andere. Deshalb ist es sinnvoll, mal die eine Schreibweise zu benutzen, mal die andere, je nachdem, welche Sichtweise man betonen will.

Wenn wir betonen wollen, dass wir von Punkten sprechen, schreiben wir

$$(x, y, z) .$$

Wenn wir betonen wollen, dass wir von Vektoren sprechen, schreiben wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Der 3-dimensionale Raum

Oder anders gesagt:

Jede der folgenden Schreibweisen für Elemente des $\mathbb{R}^3$ ist in Ordnung:

$$(x, y, z) \quad (x; y; z) \quad (x|y|z) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Man sollte die Schreibweisen aber nicht willkürlich mischen, besonders nicht die letzte mit den anderen.

Übrigens. Später in der Linearen Algebra werden wir immer die Spaltenschreibweise benutzen.

Der 2-dimensionale Raum

Der 2-dimensionale Raum $\mathbb{R}^2$ besteht aus Punkten (x, y) .

Man kann sich den $\mathbb{R}^2$ als Teilmenge vom $\mathbb{R}^3$ vorstellen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, 0) \end{array}$$

Der d -dimensionale Raum

Die Elemente des $\mathbb{R}^d$ sind **d -Tupel** $(x_1, \dots, x_d)$ mit $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$.

Notation. $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d) = (x_1; \dots; x_d) = (x_1 | \dots | x_d)$

Solche Tupel nennt man dann auch **Punkte** (wie im $\mathbb{R}^3$).

Alternativ schreibt man auch wieder:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

Wenn man betonen will, dass es sich um einen Vektor handelt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

Der d -dimensionale Raum

Die Zahl d heißt die **Dimension**.

So etwas wie “ d -dimensional” sollte einen aber nicht einschüchtern, es geht nur um Tupel von d Zahlen!

Zum Wort “Dimension”

Das Wort **Dimension** hat im Kontext der Mathematik / Naturwissenschaften / Ingenieurwissenschaften zwei verschiedene Bedeutungen.

Zum Wort “Dimension”

Im Kontext von physikalischen Größen.

Physikalische Größen haben Dimensionen.

Dimensionen sind beispielsweise:

Länge, Zeit, Masse, Stromstärke, Temperatur.

Man kann diese nun multiplizieren / dividieren.

Beispiele:

- ▶ Die Geschwindigkeit hat die Dimension Länge/Zeit.
- ▶ Die stetige Wachstumsrate (als physikalisches Konzept) hat die Dimension 1/Zeit.

Zum Wort “Dimension”

Im Kontext von Richtungen.

Intuition: In wieviele Richtungen kann man sich bewegen?

- ▶ Auf einer Geraden: in eine Richtung,
- ▶ in einer Ebene: in zwei Richtungen,
- ▶ im Raum: in drei Richtungen,
- ▶ im $\mathbb{R}^d$: ...

Man spricht hier auch von der **Anzahl der Freiheitsgrade**.

Also: Der $\mathbb{R}^d$ hat die Dimension d / hat d Freiheitsgrade.

Der d -dimensionale Raum

Achtung. Für $d = 2$ haben wir zwei übliche Bezeichnungen für Punkte:

1. (x, y)
2. (x_1, x_2)

Für $d = 3$ haben wir entsprechend:

1. (x, y, z)
2. (x_1, x_2, x_3)

Anwendung

Der $\mathbb{R}^d$ ist wichtig in den Wirtschaftswissenschaften. Es gibt viele, viele Anwendungen:

- ▶ Man betrachtet für Aktien $A_1, \dots, A_d$ zu einem Zeitpunkt die Kurse $x_1, \dots, x_d$. Alle Kurse zusammen ergeben das Tupel $(x_1, \dots, x_d)$.
- ▶ Ein Energieversorger hat d Kraftwerksblöcke $K_1, \dots, K_d$. Er betrachtet zu einem Zeitpunkt die jeweilige Stromproduktionen $x_1, \dots, x_d$.
- ▶ Ein Investor hat d Firmen betrachtet zu einem Zeitpunkt das Eigenkapital der Firmen nach den Bilanzen des vorherigen Jahres.
- ▶ Man betrachtet zu einem Zeitpunkt das BIP von d Ländern im vorherigen Jahr.

Mehrere Tupel

Ein Tupel im $\mathbb{R}^2$ bezeichnen wir typischerweise mit (x, y) , ein Tupel im $\mathbb{R}^3$ mit (x, y, z) .

Wenn wir nun **mehrere Tupel** betrachten, benutzen wir einen Index "oben". Z.B.:

$$(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), (x^{(3)}, y^{(3)})$$

Mehrere Tupel im $\mathbb{R}^d$

Wenn wir nur ein Tupel im $\mathbb{R}^d$ betrachten, bezeichnen wir dies typischerweise mit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$.

Wenn wir zwei Tupel im $\mathbb{R}^d$ betrachten, bezeichnen wir diese typischerweise mit $\underline{u} = (u_1, \dots, u_d)$, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_d)$.

Wenn wir noch mehr Tupel benötigen:

$$\underline{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_d^{(1)})$$

$$\underline{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dots, x_d^{(2)})$$

$$\underline{x}^{(3)} = (x_1^{(3)}, \dots, x_d^{(3)})$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Also: x_i ist der i -te Eintrag des Tupel $\underline{x}$ aber $\underline{x}^{(i)}$ ist das i -te Tupel.

Arithmetik

Addition. Die Tupel / Punkte kann man “komponentenweise addieren”:

Für den $\mathbb{R}^3$

$$(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) + (x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) := (x^{(1)} + x^{(2)}, y^{(1)} + y^{(2)}, z^{(1)} + z^{(2)})$$

Zum Beispiel:

$$(1; 2, 4; -0, 9) + (0, 5; 3, 1; 2, 3) = (1, 5; 5, 5; 1, 4)$$

Oder:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2, 4 \\ -0, 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, 5 \\ 3, 1 \\ 2, 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 5 \\ 5, 5 \\ 1, 4 \end{pmatrix}$$

Arithmetik

Für den $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\underline{u} + \underline{v} &= (u_1, \dots, u_d) + (v_1, \dots, v_d) \\ &:= (u_1 + v_1, \dots, u_d + v_d)\end{aligned}$$

Zum Beispiel:

$$(3; 0; -1; 1) + (-1; 5; -4; -1) = (2; 5; -5; 0)$$

Achtung. Damit man zwei Tupel / Vektoren addieren kann, müssen diese gleichviele Einträge haben. (Sie müssen im selben Raum $\mathbb{R}^d$ liegen.) Insbesondere kann man nicht einen Vektor und eine Zahl addieren.

Arithmetik

Multiplikation mit Skalaren.

Ein **Skalar** ist nichts anderes als eine Zahl. Man kann ein Tupel / einen Vektor mit einem Skalar **multiplizieren**. Das Skalar schreiben wir immer links vom Tupel / Vektor.

Für den $\mathbb{R}^3$

$$a \cdot (x, y, z) := (ax, ay, az)$$

Zum Beispiel:

$$3 \cdot (5; -7; 8) = (15; -21; 24)$$

$$(-1) \cdot (5; -7; 8) = (-5; 7; -8)$$

$$(-1) \cdot (x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

Geometrisch haben wir hier eine Streckung um 3 und eine Punktspiegelung am Nullpunkt.

Arithmetik

Für den $\mathbb{R}^d$

$$a \cdot \underline{x} = a \underline{x} = a(x_1, \dots, x_d) := (ax_1, \dots, ax_d)$$

Zum Beispiel:

$$(-5) \cdot (1; 7; -1; 0; 4) = (-5; -35; 5; 0; -20)$$

Arithmetik

Negation

$$-\underline{x} := (-1) \cdot \underline{x} = (-x_1, \dots, -x_d)$$

Zum Beispiel:

$$-(1; 7; -1; 0; 4) = (-1; -7; 1; 0; -4)$$

Länge

Die **Länge** eines Vektors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist definiert als

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entsprechend setzt man auch

$$\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ebenso:

$$\|(x, y, z)\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Länge

Allgemeiner:

$$\|(x_1, \dots, x_d)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$$

Abstand im $\mathbb{R}^2$

Der **Abstand** von zwei Punkten $(x^{(1)}, y^{(1)})$ und $(x^{(2)}, y^{(2)})$ im $\mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned} & \| (x^{(1)}, y^{(1)}) - (x^{(2)}, y^{(2)}) \| \\ = & \| (x^{(1)} - x^{(2)}, y^{(1)} - y^{(2)}) \| \\ = & \sqrt{(x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2} . \end{aligned}$$

Abstand im $\mathbb{R}^3$

Der **Abstand** von zwei Punkten $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$ und $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$ im $\mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{aligned} & \| (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) - (x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \| \\ = & \| (x^{(1)} - x^{(2)}, y^{(1)} - y^{(2)}, z^{(1)} - z^{(2)}) \| \\ = & \sqrt{(x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2 + (z^{(1)} - z^{(2)})^2} . \end{aligned}$$

Abstand im $\mathbb{R}^d$

Der **Abstand** von zwei Punkten / Tupeln $\underline{u}$ und $\underline{v}$ im $\mathbb{R}^d$ ist

$$\begin{aligned} & \| \underline{u} - \underline{v} \| \\ = & \| (u_1 - v_1, \dots, u_d - v_d) \| \\ = & \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_d - v_d)^2} . \\ = & \sqrt{\sum_{i=1}^d (u_i - v_i)^2} . \end{aligned}$$

Kreis und Kreisscheibe

Sei $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$.

Dann haben wir den **Kreis** um $(x^{(0)}, y^{(0)})$ mit Radius r :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x^{(0)}, y^{(0)})\| = r\} ,$$

die **abgeschlossene Kreisscheibe** um $(x^{(0)}, y^{(0)})$ mit Radius r :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x^{(0)}, y^{(0)})\| \leq r\} ,$$

die **offene Kreisscheibe** um $(x^{(0)}, y^{(0)})$ mit Radius r :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x^{(0)}, y^{(0)})\| < r\} .$$

Sphäre und Ball

Sei $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$.

Dann haben wir die **Sphäre** um $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ mit Radius r :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z) - (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})\| = r\} ,$$

den **abgeschlossenen Ball** um $(x^{(0)}, y^{(0)})$ mit Radius r :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z) - (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})\| \leq r\} ,$$

den **offenen Ball** um $(x^{(0)}, y^{(0)})$ mit Radius r :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z) - (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})\| < r\} .$$

Sphäre und Ball im $\mathbb{R}^d$

Sei $\underline{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_d^{(0)}) \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$.

Dann haben wir die **d -dimensionale Sphäre** um $\underline{x}^{(0)}$ mit Radius r :

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| = r\},$$

den **d -dimensionalen abgeschlossenen Ball** um $\underline{x}^{(0)}$ mit Radius r :

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq r\},$$

den **d -dimensionalen offenen Ball** um $\underline{x}^{(0)}$ mit Radius r :

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| < r\}.$$

Beachte. Für $d = 1$ und $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, $r > 0$ erhalten wir:

- ▶ Die 1-dimensionale Sphäre ist nun $\{x^{(0)} + r, x^{(0)} - r\}$.
- ▶ Der 1-dimensionale offene Ball ist nun das offene Intervall $(x^{(0)} - r, x^{(0)} + r)$.
- ▶ Der 1-dimensionale abgeschlossene Ball ist nun das abgeschlossene Intervall $[x^{(0)} - r, x^{(0)} + r]$.

Umgebungen

Terminologie.

Für $r = \varepsilon$ heißt das Intervall

$$(x^{(0)} - r, x^{(0)} + r) = (x^{(0)} - \varepsilon, x^{(0)} + \varepsilon)$$

offene ε -Umgebung von $x^{(0)}$

und das Intervall

$$[x^{(0)} - r, x^{(0)} + r] = [x^{(0)} - \varepsilon, x^{(0)} + \varepsilon]$$

abgeschlossene ε -Umgebung von $x^{(0)}$.

Umgebungen

Entsprechend nennt man

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| < r\}$$

auch die **offene ε -Umgebung** von $x^{(0)}$, Bezeichnung: $\overset{o}{U}_\varepsilon(\underline{x}^{(0)})$;

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\| \leq r\}$$

auch die **abgeschlossene ε -Umgebung** um $\underline{x}^{(0)}$, Bezeichnung: $\overline{U}_\varepsilon(\underline{x}^{(0)})$.

Folgen

Wie auch im $\mathbb{R}$ betrachten wir **Folgen**. Die Indizes schreiben wir aber jetzt oben:

Im $\mathbb{R}^3$: $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}), (x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)}), \dots$

Formaler: $((x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}^+}$.

D.h.: Eine Folge im $\mathbb{R}^3$ besteht aus drei Folgen im $\mathbb{R}$.

Folgen

Im $\mathbb{R}^d$: $(x_1^{(1)}, \dots, x_d^{(1)})$, $(x_1^{(2)}, \dots, x_d^{(2)})$, $(x_1^{(3)}, \dots, x_d^{(3)})$, $\dots$

Formaler: $((x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}^+} = (\underline{x}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$.

Wiederholung

Eine Folge $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ in $\mathbb{R}$ heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}^+$ mit

$$|a^{(n)} - a| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

kurz: Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$|a^{(n)} - a| \leq \varepsilon$$

für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}^+$.

Man sagt: "... für **fast alle** $n \in \mathbb{N}^+$."

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Satz. Es sei $((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge im $\mathbb{R}^2$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen x und die Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen y .
- b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

- c) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|(x^{(n)}, y^{(n)}) - (x, y)\| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Aussage b):

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

D.h.: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

Für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$ liegt das Folgenglied $(x^{(n)}, y^{(n)})$ im Quadrat mit Seitenlängen 2ε um (x, y) .

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Aussage c):

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|(x^{(n)}, y^{(n)}) - (x, y)\| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

D.h.: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

Für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$ liegt das Folgenglied $(x^{(n)}, y^{(n)})$ in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius ε um (x, y) , d.h. in der abgeschlossenen ε -Umgebung $\overline{U}_\varepsilon((x, y))$.

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Satz. Es sei $((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge im $\mathbb{R}^2$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen x und die Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen y .
- b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

- c) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|(x^{(n)}, y^{(n)}) - (x, y)\| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Zum Beweis. Wir geben uns $(x^{(n)}, y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ und (x, y) vor und zeigen:

Wenn a) gilt, dann gilt auch b) .

Symbolisch:

„a) $\rightarrow$ b)“ oder auch „a) $\implies$ b)“

„a) impliziert b)“

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Es sei $((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge im $\mathbb{R}^2$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Wir wollen zeigen:

Wenn gilt: Die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen x und die Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen y .

Dann gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiere gegen x und die Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiere gegen y .

Zu zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es

- ein N_1 mit

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N_1$

- ein N_2 mit

$$|y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N_2$.

Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt dann

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Wir zeigen nun:

Wenn b) gilt, dann gilt auch a) .

Symbolisch:

$$b) \rightarrow a)$$

b) impliziert a)

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Es sei $((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge im $\mathbb{R}^2$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Wir wollen zeigen:

Wenn gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Dann gilt: Die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen x und die Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen y .

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gelte

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Zu zeigen: Die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen x und die Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen y .

Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein N mit

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Damit gilt insbesondere

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Ebenso:

$$|y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Satz. Es sei $((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge im $\mathbb{R}^2$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen x und die Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen y .
- b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

- c) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|(x^{(n)}, y^{(n)}) - (x, y)\| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Graphische Erläuterung

Erläuterung zum Satz.

$$a_n = 2 - \frac{1}{n} \quad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n} \quad \underline{x}^{(n)} = (x^{(n)}, y^{(n)}) := (a_n; b_n)$$

$$a_n = 2 - \frac{1}{n} \quad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n} \quad \underline{x}^{(n)} = (x^{(n)}, y^{(n)}) := (a_n; b_n)$$

$$a_n = 2 - \frac{1}{n} \quad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n} \quad \underline{x}^{(n)} = (x^{(n)}, y^{(n)}) := (a_n; b_n)$$

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 0,5 \qquad \underline{x}^{(1)} = (1; 0,5)$$

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 0,5 \qquad \underline{x}^{(1)} = (1; 0,5)$$

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 0,5 \qquad \underline{x}^{(1)} = (1; 0,5)$$

$$a_2 = 1,5 \quad b_2 = 1,25 \quad \underline{x}^{(2)} = (1,5; 1,25)$$

$$a_2 = 1,5 \quad b_2 = 1,25 \quad \underline{x}^{(2)} = (1,5; 1,25)$$

$$a_2 = 1,5 \quad b_2 = 1,25 \quad \underline{x}^{(2)} = (1,5; 1,25)$$

$$a_3 = 1,\overline{6} \qquad b_3 = 0,8\overline{3} \qquad \underline{x}^{(3)} = (1,\overline{6}; 0,8\overline{3})$$

$$a_3 = 1,\overline{6} \qquad b_3 = 0,8\overline{3} \qquad \underline{x}^{(3)} = (1,\overline{6}; 0,8\overline{3})$$

$$a_3 = 1,\overline{6} \qquad b_3 = 0,8\overline{3} \qquad \underline{x}^{(3)} = (1,\overline{6}; 0,8\overline{3})$$

$$a_4 = 1,75 \quad b_4 = 1,125 \quad \underline{x}^{(4)} = (1,75; 1,125)$$

$$a_4 = 1,75 \quad b_4 = 1,125 \quad \underline{x}^{(4)} = (1,75; 1,125)$$

$$a_4 = 1,75 \quad b_4 = 1,125 \quad \underline{x}^{(4)} = (1,75; 1,125)$$

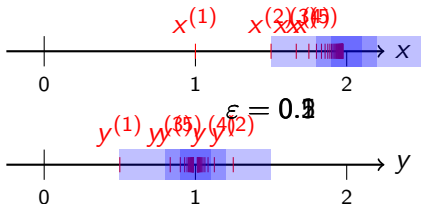
$$a_5 = 1,8 \quad b_5 = 0,9 \quad \underline{x}^{(5)} = (1,8; 0,9)$$

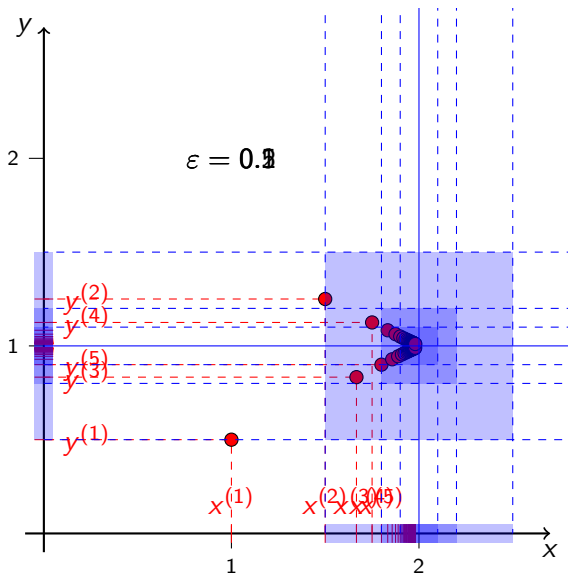
$$a_5 = 1,8 \quad b_5 = 0,9 \quad \underline{x}^{(5)} = (1,8; 0,9)$$

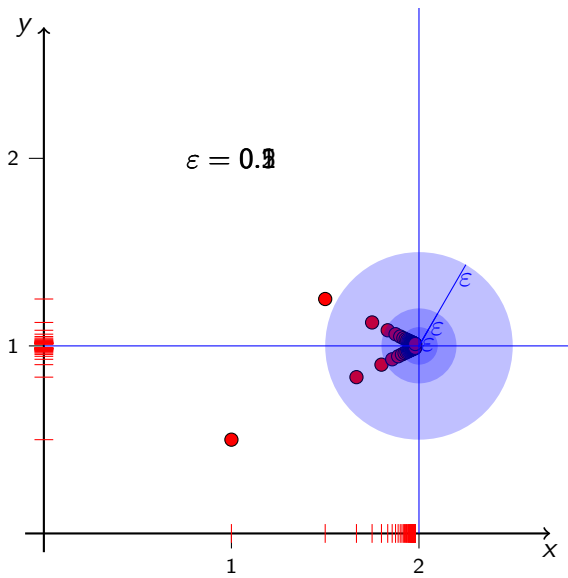
$$a_5 = 1,8 \quad b_5 = 0,9 \quad \underline{x}^{(5)} = (1,8; 0,9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

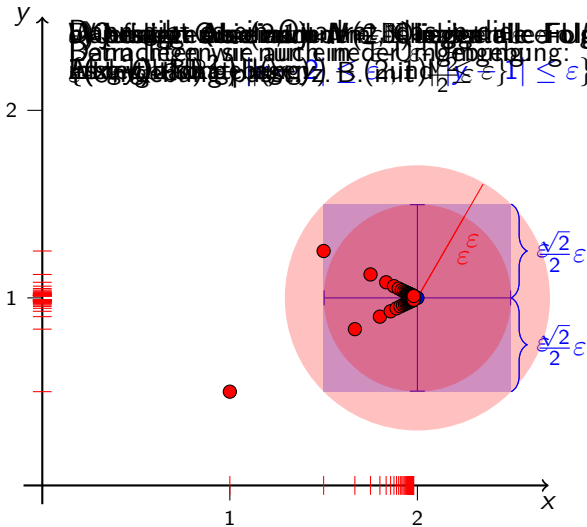
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$







Definition 2.10 (Cauchy-Kriterium): Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n, m \geq N$ gilt: $|x_n - x_m| < \varepsilon$.



Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Satz. Es sei $((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge im $\mathbb{R}^2$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen x und die Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen y .
- b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

- c) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|(x^{(n)}, y^{(n)}) - (x, y)\| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Konvergenz im $\mathbb{R}^2$

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, sagen wir, dass die Folge $(x^{(n)}, y^{(n)})$ gegen (x, y) **konvergiert**. Schreibweise:

$$(x^{(n)}, y^{(n)}) \longrightarrow (x, y) \text{ für } n \longrightarrow \infty$$

Der Punkt (x, y) heißt dann der **Grenzwert** der Folge:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (x^{(n)}, y^{(n)}) = (x, y)$$

Konvergenz

Entsprechende Definitionen gelten auch für den $\mathbb{R}^3$.

Merke. Eine Folge $(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)})$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt (x, y, z) , wenn gilt:

- ▶ $x^{(n)} \longrightarrow x$ für $n \longrightarrow \infty$
- ▶ $y^{(n)} \longrightarrow y$ für $n \longrightarrow \infty$
- ▶ $z^{(n)} \longrightarrow z$ für $n \longrightarrow \infty$

Konvergenz

Für den $\mathbb{R}^d$ geht es ebenso.

Merke. Eine Folge $\underline{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)})$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt / ein Tupel $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$, wenn gilt:

- ▶ $x_1^{(n)} \longrightarrow x_1$ für $n \longrightarrow \infty$
- ▶ $\vdots$
- ▶ $x_d^{(n)} \longrightarrow x_d$ für $n \longrightarrow \infty$

Schreibweise.

$$\underline{x}^{(n)} \longrightarrow \underline{x} \text{ für } n \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \underline{x}^{(n)} = \underline{x}$$