Musterlösung zum Weihnahchtsübungsblatt

Teil 1 – von Martin Fabricius

Aufgabe 1

a) Diese Aufgabe kann z. B. durch ausmultiplizieren gelöst werden:

$$\begin{aligned}
(4323)_7 &= 4 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 \\
&= 4 \cdot 343 + 3 \cdot 49 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \\
&= 1372 + 147 + 14 + 3 \\
&= 1536 \\
(424)_6 &= 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 \\
&= 4 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \\
&= 144 + 12 + 4 \\
&= 160
\end{aligned}$$

Oder mit dem Hornerschema:

	(4	3	2	$3)_7$
7		28	217	1533
	4	31	219	**1536**

	(4	2	$4)_6$
6		24	156
	4	26	**160**

b)

$$\begin{array}{rrrrcccrcr}
5 & 4 & 6 & 5 & : & 6 & = & 910 & R & 5 \\
 & 9 & 1 & 0 & : & 6 & = & 151 & R & 4 \\
 & 1 & 5 & 1 & : & 6 & = & 25 & R & 1 \\
 & & 2 & 5 & : & 6 & = & 4 & R & 1 \\
 & & & 4 & : & 6 & = & 0 & R & 4
\end{array}$$

Wir lesen die Reste von unten nach oben und erhalten: $5445 = (41145)_6$

$$\begin{array}{rrrrcccrcr}
5 & 4 & 6 & 5 & : & 5 & = & 1093 & R & 0 \\
1 & 0 & 9 & 3 & : & 5 & = & 218 & R & 3 \\
 & 2 & 1 & 8 & : & 5 & = & 43 & R & 3 \\
 & & 4 & 3 & : & 5 & = & 8 & R & 3 \\
 & & & 8 & : & 5 & = & 1 & R & 3 \\
 & & & 1 & : & 5 & = & 0 & R & 1
\end{array}$$

Wir lesen die Reste von unten nach oben und erhalten: $5445 = (133330)_5$

c)

$$\begin{array}{cccccc}
 & & (2 & 3 & 4 & 2)_7 \\
+ & & & (5 & 2 & 4)_7 \\
+ & {}_2 & & (6_1 & 2_1 & 2)_7 \\
\hline
 & & (4 & 1 & 2 & 1)_7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & (1 & 0 & 3 & 1)_6 \\
- & & & (2 & 1 & 2)_6 \\
- & {}_1 & & (1 & 1_1 & 5)_6 \\
\hline
 & & & (3 & 0 & 0)6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
(2 & 3 & 1)_5 & \cdot & (2 & 4)_5 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 2 & \\
+ & & 2 & 0 & 2 & 4 \\
\hline
 & (1 & 2 & 1 & 4 & 4)_5
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & (1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2)_4 & :(3)_4 = (12012)_4 \\
- & & \underline{3} & & & & & \\
 & & 1 & 2 & & & & \\
 & - & \underline{1} & \underline{2} & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & \\
 & & - & & \underline{0} & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & - & & \underline{3} & & \\
 & & & & & 1 & 2 & \\
 & & & & - & \underline{1} & \underline{2} & \\
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Aufgabe 2

a) $10000 + 12 \cdot \Delta = 20000 \Leftrightarrow \Delta = \frac{20000-10000}{12} (= \frac{10000}{12} = \frac{2500}{3})$

b) $\Delta \approx 833$

c) $10000 \cdot q^{12} = 20000 \Leftrightarrow q = \sqrt[12]{\frac{20000}{10000}} (= \sqrt[12]{2})$

d) Wir betrachten $z^{12} = 2$

z_L	z_L^{12}	z_M	z_M^{12}	z_R	z_R^{12}
1	1	1,5	129,7463379	2	4096
1	1	1,25	14,55191523	**1,5**	129,7463379
1	1	1,125	4,109890673	**1,25**	14,55191523
1	1	1,0625	2,069889992	**1,125**	4,109890673
1	1	1,03125	1,446663548	**1,0625**	2,069889992
1,03125	1,446663548	1,046875	1,732758128	1,0625	2,069889992
1,046875	1,732758128	1,0546875	1,894460638	1,0625	2,069889992
1,0546875	1,894460638	1,05859375	1,98039539	1,0625	2,069889992
1,05859375	1,98039539	1,060546875	2,024689466	1,0625	2,069889992
1,05859375	1,98039539	1,059570313	2,002430163	**1,060546875**	2,024689466
1,05859375	1,98039539	1,059082031	1,99138484	**1,059570313**	2,002430163
1,059082031	1,99138484	1,059326172	1,996900501	1,059570313	2,002430163
1,059326172	1,996900501	1,059448242	1,99966358	1,059570313	2,002430163
1,059448242	1,99966358	1,059509277	2,001046433	1,059570313	2,002430163
1,059448242	1,99966358	1,05947876	2,000354897	**1,059509277**	2,001046433
1,059448242	1,99966358			**1,05947876**	2,000354897

Also ist der durchschnittliche monatliche Wachstumsfaktor $\approx$ 1,0594. Daraus ergibt sich eine durchschnittliche monatliche Wachstumsrate von $\approx$ 5,94%.

Musterlösung zum Weihnahchtsübungsblatt

Teil 2 – von Tom Schmidtmayer

AUFGABE 3

a)

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$$

Grob gesprochen: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist genau die n-te Quadratzahl.

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1}(2k - 1) = 1 = 1^2$$

Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsschluss: $n \to n + 1$

Es gelte (IV):

$$\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$$

Zu zeigen ist nun:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) = (n + 1)^2$$

Beweis hiervon:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) = \big(\sum_{k=1}^{n}(2k - 1)\big) + (2(n + 1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Für das 2. Gleichheitszeichen haben wir die IV verwendet, für das Letzte eine binomische Formel.

Anmerkung: Wenn man benutzt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

vereinfacht sich der Beweis zu

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k)-\sum_{k=1}^{n}1=2\sum_{k=1}^{n}k-n=2\cdot\frac{n^2+n}{2}-n=n^2+n-n=n^2$$

Induktion möge also immer eine angebrachte Idee sein, aber es geht manchmal schneller.

b)

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=\sum_{k=1}^{n}(k\cdot k!)=(n+1)!-1$$

Induktionsanfang: $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1}(k\cdot k!)=1\cdot 1!=1=2-1=2!-1=(1+1)!-1$$

Induktionsschluss: $n\longrightarrow n+1$.

Es gelte (IV):

$$\sum_{k=1}^{n}(k\cdot k!)=(n+1)!-1$$

Zu zeigen ist nun:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k\cdot k!)=(n+2)!-1$$

Beweis hiervon:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k\cdot k!)=\sum_{k=1}^{n}(k\cdot k!)+(n+1)\cdot(n+1)!=(n+1)!-1+(n+1)!\cdot(n+1)=$$

$$(n+1)!\cdot(n+1+1)-1=(n+1)!\cdot(n+2)-1=(n+2)!-1$$

Anmerkung:
Dieser Aufgabenteil möge exotisch aussehen, hat aber durchaus relevanten Hintergrund zum Vorlesungsstoff, Thema Zahlensysteme. Damit wird die Existenz und Eindeutigkeit der Darstellung jeder natürlichen Zahl im fakultätsbasierten Zahlensystem gezeigt. Wer sich näher informieren möchte, schaue auf Wikipedia nach.

AUFGABE 4

Seien, wie in der Aufgabenstellung, a,b $\in\mathbb{R}$ sowie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mittels

$f(x) = ax + b$ gegeben.
Zuerst bestimmen wir, für welche Werte von a und b die Funktionen bijektiv sind.
Es gilt

$$a \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ bijektiv}$$

$\Rightarrow$

Sei nun, a $\neq$ 0, dann kann durch a dividiert werden, dies wird wichtig werden.
Ich weise jetzt nach, dass f sowohl injetiv als auch surjektiv ist.

injektiv
Seien dazu $x_1; x_2$ reelle Zahlen mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wir müssen zeigen, dass dann $x_1 = x_2$ gilt.

Es gelte also $f(x_1) = f(x_2)$. Wir setzen die Definition von f ein und erhalten

$$a \cdot x_1 + b = a \cdot x_2 + b$$

Subtraktion von b sowie Division durch a (hierfür darf a nicht Null sein), gibt $x_1 = x_2$, damit ist f injektiv.
Alternativ ist auch eine Argumentation über die Ableitung möglich.

surjektiv
Sei dazu r $\in \mathbb{R}$ beliebig. Falls $x_r = \frac{r-b}{a}$ ist, gilt

$$f(x_r) = a \cdot \frac{r-b}{a} + b = r - b + b = r$$

Damit ist f surjektiv, da jede reelle Zahl im Bild liegt.
f ist damit bijektiv, da f injektiv und surjektiv ist.

$\Leftarrow$
Hier arbeite ich mit indirektem Beweis und zeige

$$a = 0 \Rightarrow f \ \textit{nicht} \ \text{bijektiv}$$

Sei nun a = 0, damit gilt f(x) = b, und zwar für jedes reelle x. Damit ist aber f(0) = f(1) = b und 0 $\neq$ 1, damit f nicht injektiv, also auch nicht bijektiv.
Dies beendet den Beweis.

Nun zum zweiten Teil: Wann stimmt ein f mit seiner Inversen f^{-1} überein?
Dazu berechne ich zuerst f(f(x)), dies ist

$$f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

Dies müssen wir nun gleich der Identität (I(x) = x) setzen und erhalten die Bedingung

$$f(f(x)) = I(x) \Leftrightarrow a^2x + ab + b = x$$

Damit lesen wir die Bedingungen für a und b ab:
i) $a^2 = 1$
ii) $ab + b = (a + 1)b = 0$

i) gibt nochmals 2 Fälle zu unterscheiden

1. Fall: a = 1
Wegen Bedingung ii) und a+1 = 2 muss dann b = 0 gelten.

2. Fall: a = -1
In diesem Falle gilt a+1 = 0, es sind also keine Einschränkungen an b notwendig.

Dies beendet den Beweis für Aufgabe 4.

AUFGABE 5

a)
Sei die Folge wie in der Aufgabenstellung definiert und sei $0 < \varepsilon < 1$, für die restlichen ε, wähle N = $N(\varepsilon) = 101$. Dies ist möglich, da $a_{101} = 1$ und dem Fakt, dass a_n eine monoton fallende Folge ist. Dies ist so, da $b_n = \frac{1}{n^2}$ monoton fallend ist. Im Folgenden können wir uns also auf den nicht konstanten Teil der Folge konzentrieren.

$$|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{(n-100)^2}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{(n-100)^2} < \varepsilon$$

Die Betragsstriche konnten weggelassen werden, da a_n positiv ist.

$$\frac{1}{(n-100)^2} < \varepsilon \Leftrightarrow (n-100)^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > (\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} + 100$$

Damit dies eine natürliche Zahl wird, runden wir dies noch auf.

b)
Im Folgenden betrachten wir die Zahlenfolge

$$a_n = n^2 + (-1)^n \cdot n$$

Um die Divergenz zu beweisen, beweise ich zuerst Folgendes:
a_n ist monoton wachsend

Beweis:
1. Fall: n gerade $\Rightarrow n+1$ ungerade

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n - 1 - n^2 - n = n^2 - n^2 + 2n - n - n + 1 - 1 = 0$$

2. Fall: n ungerade $\Rightarrow n+1$ gerade

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + n + 1 - n^2 + n = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 + n = 2n + 2 > 0$$

Damit ist die Aussage gezeigt.
Wenn wir nun für eine reelle Zahl S eine Zahl natürliche Zahl $n(S)$ finden, sodass $a_{n(S)} \geq S$, dann gilt wie gewünscht:

$$S \leq a_n \text{ für allen} \geq n(S)$$

Wegen den Vorbetrachtungen wissen wir, dass $a_1 = 0$ der kleinste Wert der Zahlenfolge ist, daher können wir uns auf S > 0 beschränken. Wir haben also die Gleichung

$$n^2 - n = S \Leftrightarrow n^2 - n - S = 0$$

zu lösen.
Anwenden der p-q-Formel gibt

$$n_{1;2}(S) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + S}$$

Wegen S > 0 ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv, daher kann die Wurzel gezogen werden. Wir nehmen den Term

$$n_1(S) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + S}$$

Der andere Term wird für S hinreichend gross negativ, daher für unsere Betrachtungen wertlos.
Um daraus eine natürliche Zahl zu gewinnen, runden wir stets auf die nachste natürliche Zahl auf. Da die Funktion f(x) = $x^2 - x - S$ für x > 1 monoton wachsend ist (f'(x) = 2x-1), haben wir damit den Wert n(S) gefunden.

AUFGABE 6

Jede dieser Mengen besitzt das Supremum $\sqrt{2}$, dies wollen wir jetzt zeigen.
Zuerst zu

$$A = \{x \in \mathbb{R} | \; x^2 \leq 2\} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

Offensichtlich gilt $\forall a \in A : a \leq \sqrt{2}$, also ist $\sqrt{2}$ eine obere Schranke. Bleibt noch zu zeigen, dass es die kleinste obere Schranke ist.
Angenommen, es gäbe ein $a_1 \in A$ mit $a_1 < \sqrt{2}$, zum Beispiel $a_1 = \sqrt{2} - \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$), welches auch obere Schranke ist.
Dann ist gilt aber auch $a_1 < a_1 + \frac{\varepsilon}{2} (= a_2) = \sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2} \in A$, somit kann a_1 keine

obere Schranke sein.
Damit ist der Beweis beendet.

Der Beweis für
$$B = \{x \in \mathbb{R}|\ x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$$
läuft analog, da wir an keiner Stelle benutzt haben, dass $\sqrt{2} \in A$.

Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, gilt
$$\{x \in \mathbb{Q}|\ x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q}|\ x^2 \leq 2\} = C$$
Aus der VL ist bekannt:
$$\exists (a_n) \subset \mathbb{Q} \mid a_n \to a$$
Zudem kann a_n monoton wachsend gewählt werden.
Es existiert also eine rationale, monoton wachsende Zahlenfolge, welche gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Mit der Konvergenzdefinition folgt daraus
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \sqrt{2} - a_n < \varepsilon,\ \text{für alle } n > n_0(\varepsilon)$$
Die Betragsstriche habe ich weggelassen, da $a_n < \sqrt{2}$ gilt.
Nun argumentieren wir ähnlich wie im erstn Teil.
Offensichtlich ist $\sqrt{2}$ obere Schranke von C.
Gäbe es nun eine kleinere obere Schranke, nämlich a_1 (wie oben), dann lägen im Intervall $(a_2; \sqrt{2})$ (a_2 wie oben) immernoch Zahlenfolgeglieder, damit kann a_1 keine obere Schranke sein.
Dies beendet den Beweis.

AUFGABE 7

Ich will die Äquivalenz der folgenden, beiden Konvergenzdefinitionen zeigen.
Eine Folge (a_n) heisst konvergent gegen eine Zahl a, genau dann wenn
i) $\forall \varepsilon_0 > 0\, \exists n_0(\varepsilon_0) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon_0$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon_0)$
ii) $\forall \varepsilon_1 > 0\, \exists n_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \varepsilon_1$ für alle $n \geq n_1(\varepsilon_1)$
Zuerst die Implikation $i) \Rightarrow ii)$
Es gelte also i) und sei $\varepsilon_1 > 0$, setze dann $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$ sowie $n_0(\varepsilon_0) = n_1(\varepsilon_1)$, dann gilt laut i)
$$\forall \varepsilon_0 (= \varepsilon_1) > 0\, \exists n_0(\varepsilon_0) = (n_1(\varepsilon_1)) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon_0 = \varepsilon_1 \text{ für alle} n \geq n_0(\varepsilon_0)$$
Da $\leq \varepsilon_1$ schwächer ist als $< \varepsilon_1$, folgt ii).

Nun zur Implikation $ii) \Rightarrow i)$
Es gelte nun ii), dies bedeutet:
$$\forall \varepsilon_1 > 0\, \exists n_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \varepsilon_1 \text{ für alle } n \geq n_1(\varepsilon_1)$$

Sei nun $\varepsilon_0 > 0$ gegeben. Laut ii) existiert für $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$ ein $n_1(\varepsilon_1) = n_0(\frac{\varepsilon_0}{2})$ mit

$$|a_n - a| \leq \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0 \text{ für alle } n > n_1(\varepsilon_1) = n_0(\frac{\varepsilon}{2})$$

Dies beendet den Beweis, da i) gilt.

AUFGABE 8*

Sei (a_n) eine monoton wachsende Zahlenfolge, dann sin äquivalent:
i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = a$

Beweis:
i) $\Rightarrow$ ii)

Wegen der Monotonie gilt $a \geq a_n$, und zwar für jedes n, damit ist a obere Schranke. Es verbleibt zu zeigen, dass a kleinste, obere Schranke ist. Sei dazu $a_1 := a - \varepsilon$ (für $\varepsilon > 0$) wegen der Konvergenzdefinition existiert ein $n_0(\varepsilon)$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$, dies bedeutet, es gibt unendlich viele Folgeglieder, deren Abstand zu a kleiner ist als Epsilon. Allerdings ist $|a_1 - a| = \varepsilon$, damit kann a_1 keine obere Schranke sein.
Damit gilt ii)

ii) $\Rightarrow$ i)

Es gelte nun ii). Wegen der Monotonie der (a_n) gilt: $a_n \in [a_1; a]$, für jedes n, damit ist die Folge beschränkt und monoton, damit konvergent. Noch zu zeigen bleibt, dass der Grenzwert a ist.
Annahme 1: $b := \lim a_n > a$
Also existiert ein $\varepsilon > 0$, derart, dass $a + \varepsilon = b$. Dann ist $b - a_n \geq \varepsilon$, damit ist die Annahme falsch, Widerspruch zur Konvergenzdefinition.

Annahme 2: $b := \lim a_n < a$
Wegen der Monotonie der Folge wäre damit b eine obere Schranke, allerdings gilt $b < a$, Widerspruch, da das Supremum die kleinste obere Schranke ist.

Bemerkung:
Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ zeigt, dass die Monotonie wirklich wichtig ist!