Aufgaben zu Grundbegriffen der Stochastik (21.04.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Seien $I_1 = [1, 3), I_2 = [3, 7], I_3 = (-2, 10)$.
Bilden Sie die folgenden Mengen.

a) $I_1 \cap I_2$

b) $I_1 \cap I_3$

c) $I_1 \cup I_2$

d) $I_1 \setminus I_2$

e) $I_3 \setminus I_2$

f) $(I_1 \cup I_2) \cap I_3$

Aufgabe 2 (6 BE)

Es werden zwei ideale und unterscheidbare Würfel geworfen. Es seien folgende Ereignisse gegeben:
$A =$ Augensumme ist ungerade
$B =$ wenigstens eine 5 erscheint.
Beschreiben Sie $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse.

Aufgabe 3 (4 BE)

Für zwei zufällige Ereignisse A und B seien die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\overline{A}) = \frac{4}{5}, \qquad P(A \cup B) = \frac{2}{5}, \qquad P(B) = \frac{1}{3}$$

bekannt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

a) $P(A)$

b) $P(A \cap B)$

c) $P(A \setminus B)$

d) $P(\overline{A} \cup B)$.

(Tipp: Nutzen Sie eventuell eine Zeichnung dafür.)

Aufgabe 4 (4 BE)

In einem Sack sind vier schwarze und fünf weiße Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) mindestens 2 weiße Kugeln gezogen werden.

b) höchstens 2 weiße Kugeln gezogen werden.

c) genau 2 weiße Kugeln gezogen werden.

Aufgabe 5 (4 BE)

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt der Norm genügt, beträgt 0,96. In der Kontrolle werden normgerechte Produkte mit der Wahrscheinlichkeit 0,90 und nicht normgerechte mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 als normgerecht angesehen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt als normgerecht angesehen wird.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt, das in der Kontrolle als normgerecht angesehen wird, auch wirklich normgerecht ist.

Aufgabe 6 (6 BE)

Es seien drei Urnen U_1, U_2 und U_3 mit je 10 Losen gegeben, wobei die erste 4, die zweite 5 und die dritte 8 Gewinne enthält. Es werden drei Lose auf drei verschiedene Arten gezogen.

(1) Es wird zufällig eine Urne ausgewählt und daraus drei Lose gezogen.
(2) Es wird aus jeder Urne je ein Los gezogen.
(3) Es werden alle Lose der drei Urnen in eine Urne gegeben und daraus zufällig drei Lose gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_i $(i = 1, 2, 3)$, dass bei der Auswahlart (i), alle Lose Gewinne sind und runden Sie auf drei Stellen nach dem Komma. Begründen Sie, welches Verfahren die größte Wahrscheinlichkeit hat.

Aufgabe 7 (4 BE)

Bei einem Sportfest wird eine Schule durch sechs Schüler*innen der Klasse 8, acht Schüler*innen der Klasse 9 und vier Schüler*innen der Klasse 10 vertreten. Vor der Eröffnung werden zwei Schüler*innen dieser Schule ausgelost, die alle Sportgeräte auf die Wettkampfstätten zu verteilen haben.
Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
Ereignis A: Beide Schüler*innen sind aus der 8. Klasse.
Ereignis B: Eine Person ist aus Klasse 9 und eine Person aus Klasse 10.
Ereignis C: Es wird keine Person aus Klasse 10 ausgewählt.

Aufgabe 7 (3 BE)

Abitur 2008 hilfsmittelfrei: Eine Firma stellt an jedem Arbeitstag (Montag bis Freitag) gleich viele Handys her. Die regelmäßig durchgeführte Gütekontrolle ergibt, dass jeweils die am Montag hergestellten Handys mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% fehlerhaft sind. An den anderen Arbeitstagen (Dienstag bis Freitag) liegt die Fehlerquote in der Produktion jeweils bei 5%.
Der Produktion einer Woche wird zufällig ein Handy entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A – Das entnommene Handy ist fehlerfrei und wurde an einem Montag produziert.
B – Das entnommene Handy ist fehlerfrei.

Aufgaben zu Grundbegriffen der Stochastik (21.04.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Seien $I_1 = [1,3), I_2 = [3,7], I_3 = (-2,10)$.
Bilden Sie die folgenden Mengen.

a) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

b) $I_1 \cap I_3 = [1,3) = I_1$

c) $I_1 \cup I_2 = [1,7]$

d) $I_1 \setminus I_2 = [1,3) = I_1$

e) $I_3 \setminus I_2 = (-2,1) \cup [3,10)$

f) $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 = [1,7]$

Aufgabe 2 (6 BE)

Es werden zwei ideale und unterscheidbare Würfel geworfen. Es seien folgende Ereignisse gegeben:
$A =$ Augensumme ist ungerade
$B =$ wenigstens eine 5 erscheint.
Beschreiben Sie $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse.

$A \cap B$ – Die Augenzahl ist ungerade und es erscheint mindestens eine 5, also
$A \cap B = \{(2,5),(4,5),(6,5),(5,2),(5,4)(5,6)\}$ und $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$A \cup B$ – Die Augenzahl ist ungerade oder es erscheint mindestens eine 5, also
$A \cup B = \{(1,2),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),$
$(4,1),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\}$ und $P(A \cup B) = \frac{23}{36}$

$A \cap \overline{B}$ – Die Augenzahl ist ungerade und es erscheint keine Augenzahl gleich 5, also
$A \cap \overline{B} = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(6,1),(6,3)\}$ und
$P(A \cap \overline{B}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Aufgabe 3 (4 BE)

Für zwei zufällige Ereignisse A und B seien die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\overline{A}) = \frac{4}{5}, \qquad P(A \cup B) = \frac{2}{5}, \qquad P(B) = \frac{1}{3}$$

bekannt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

a) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ (vgl. Folie 23). Also ist $P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

c) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$

d) $P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A \setminus B) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$.

(Tipp: Nutzen Sie eventuell eine Zeichnung dafür.)

Aufgabe 4 (4 BE)

In einem Sack sind vier schwarze und fünf weiße Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) mindestens 2 weiße Kugeln gezogen werden.

$P(A) = P(wws)+P(wsw)+P(sww)+P(www) = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{75}{126} = \frac{25}{42}$

b) höchstens 2 weiße Kugeln gezogen werden.

$P(B) = 1 - P(www) = 1 - \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = 1 - \frac{15}{126} = \frac{111}{126} = \frac{37}{42}$

c) genau 2 weiße Kugeln gezogen werden.

$P(A) = P(wws) + P(wsw) + P(sww) = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$

Aufgabe 5 (4 BE)

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt der Norm genügt, beträgt 0,96. In der Kontrolle werden normgerechte Produkte mit der Wahrscheinlichkeit 0,90 und nicht normgerechte mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 als normgerecht angesehen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt als normgerecht angesehen wird.

$P(\text{normgerecht, als normgerecht angesehen})+P(\overline{\text{normgerecht}}; \text{als normgerecht angesehen}) = 0,96\cdot 0,9 + 0,04\cdot 0,05 = 0,866.$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt, das in der Kontrolle als normgerecht angesehen wird, auch wirklich normgerecht ist.

$$\frac{P(\text{normgerecht und als normgerecht angesehen})}{P(\text{normgerecht})} = \frac{0,96\cdot 0,9}{0,866} \approx 0,9977$$

Aufgabe 6 (6 BE)

Es seien drei Urnen U_1, U_2 und U_3 mit je 10 Losen gegeben, wobei die erste 4, die zweite 5 und die dritte 8 Gewinne enthält. Es werden drei Lose auf drei verschiedene Arten gezogen.

(1) Es wird zufällig eine Urne ausgewählt und daraus drei Lose gezogen.
(2) Es wird aus jeder Urne je ein Los gezogen.
(3) Es werden alle Lose der drei Urnen in eine Urne gegeben und daraus zufällig drei Lose gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_i $(i = 1, 2, 3)$, dass bei der Auswahlart (i), alle Lose Gewinne sind und runden Sie auf drei Stellen nach dem Komma. Begründen Sie, welches Verfahren die größte Wahrscheinlichkeit hat.

$P(1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8} = \frac{7}{36} \approx 0,194$

$P(2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{8}{10} = \frac{160}{1000} = 0,160$

$P(3) = \frac{17}{30}\cdot\frac{16}{29}\cdot\frac{15}{28} = \frac{34}{203} \approx 0,167$

Das Verfahren (1) hat die höchste Wahrscheinlichkeit, drei Gewinne zu ziehen.

Aufgabe 7 (4 BE)

Bei einem Sportfest wird eine Schule durch sechs Schüler*innen der Klasse 8, acht Schüler*innen der Klasse 9 und vier Schüler*innen der Klasse 10 vertreten. Vor der Eröffnung werden zwei Schüler*innen dieser Schule ausgelost, die alle Sportgeräte auf die Wettkampfstätten zu verteilen haben.
Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
Ereignis A: Beide Schüler*innen sind aus der 8. Klasse.

$P(A) = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} = \frac{5}{51} \approx 0,098$

Ereignis B: Eine Person ist aus Klasse 9 und eine Person aus Klasse 10.

$P(B) = \frac{8}{18} \cdot \frac{4}{17} + \frac{4}{18} \cdot \frac{8}{17} = \frac{32}{153} \approx 0,209$

Ereignis C: Es wird keine Person aus Klasse 10 ausgewählt.

$P(C) = P(8,8) + P(8,9) + P(9,8) + P(9,9) = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} + \frac{6}{18} \cdot \frac{8}{17} + \frac{8}{17} \cdot \frac{6}{17} + \frac{8}{17} \cdot \frac{7}{17} = \frac{91}{153} \approx 0,595$

Aufgabe 8 (3 BE)

Abitur 2008 hilfsmittelfrei: Eine Firma stellt an jedem Arbeitstag (Montag bis Freitag) gleich viele Handys her. Die regelmäßig durchgeführte Gütekontrolle ergibt, dass jeweils die am Montag hergestellten Handys mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% fehlerhaft sind. An den anderen Arbeitstagen (Dienstag bis Freitag) liegt die Fehlerquote in der Produktion jeweils bei 5%.
Der Produktion einer Woche wird zufällig ein Handy entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A – Das entnommene Handy ist fehlerfrei und wurde an einem Montag produziert.

$P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{50} = \frac{18}{100} = 0,18$

B – Das entnommene Handy ist fehlerfrei.

$P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{19}{20} = \frac{18}{100} + \frac{76}{100} = \frac{94}{100} = 0,94$

Aufgaben zu Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln (28.04.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (9 BE)

In seinem Stream „Spaß mit Flaggen“ stellt Sheldon Cooper erstaunliche Informationen über Flaggen zusammen:

① FLAGGEN IN PASADENA

	vor öffentl. Gebäuden	vor priv. Gebäuden	
hängen richtig	871		1249
hängen falsch		519	756

② ONLINEUMFRAGE ZUM WEBSTREAM

	kennen den Stream	kennen den Stream nicht	
♂	52 %		
♀			
	65 %		

a) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel und die Kontingenztafel so weit wie möglich.

b) Fertigen Sie aus der Vierfeldertafel über Flaggen in Pasadena zwei Baumdiagramme an.

c) Geben Sie an, welcher Prozentsatz an Flaggen vor Privatgebäuden in Pasadena falsch hängt.

d) Der Internetuser *RouladenRalf72* postet zu der Umfrage:

„Männer und Flaggen passen einfach besser zusammen – 52 % der Leute, die den Stream kennen, sind Männer!“

Beurteilen Sie diese Aussage auf Grundlage der vorliegenden mathematischen Daten.

e) Sheldon wählt sich live in die Umfrage ein. Er notiert die Ergebnisse der nächsten drei Teilnehmer*innen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ...

A ... alle drei Teilnehmer*innen den Webstream kennen.

B ... alle drei Teilnehmer*innen männliche User sind, die den Webstream kennen.

Aufgabe 2 (4 BE)

Die Ostsee ist ein beliebtes Urlaubsziel. Es wird geschätzt, dass 68% aller Gäste aus dem Inland kommen. 60% der Gäste, die aus dem Inland kommen, besuchen während ihres Aufenthaltes an der Ostsee auch die Wälder Mecklenburgs. Weiterhin ist bekannt, dass 80% der Gäste, die aus dem Ausland kommen, die Wälder besuchen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Tourist, der an der Ostsee seinen Urlaub verbracht hat Inländer ist und in den Wäldern war. Ermitteln Sie wie viele von 1.000 Touristen ausschließlich die Ostsee besuchen werden.

Aufgabe 3 (3 BE)

Sir Francis Galton (1822–1911) hat untersucht, ob es Zusammenhänge zwischen der Augenfarbe des Vaters und der Augenfarbe des Sohnes gibt. Dazu hat er 1.000 Väter mit ihren Söhnen analysiert und kam auf folgende Auszählungen:

	Vater helläugig	Vater dunkelägig
Sohn helläugig	471	148
Sohn dunkeläugig	151	230

Untersuchen Sie mit Regeln der Vierfeldertafel, ob diese Ereignisse unabhängig oder abhängig voneinander sind.

Aufgabe 4 (3+3+2 BE) – IQB Aufgabe 2018

Von allen Jugendlichen eines Landes im Alter von 14 bis 25 Jahren sind 49,20% weiblich. 47,10% der Jugendlichen erledigen ihre Finanzangelegenheiten regelmäßig mittels Smartphone oder Tablet. Der Anteil der Jugendlichen, die weiblich sind und ihre Finanzangelegenheiten regelmäßig mittels Smartphone oder Tablet erledigen, beträgt 19,68%.

a) Stellen Sie den beschriebenen Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine unter den Jugendlichen zufällig ausgewählte Person entweder männlich ist oder ihre Finanzangelegenheiten regelmäßig mittels Smartphone oder Tablet erledigt.

c) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine unter den weiblichen Jugendlichen zufällig ausgewählte Person ihre Finanzangelegenheiten regelmäßig mittels Smartphone oder Tablet erledigt, 40% beträgt.

Aufgabe 5 (8 + 3 BE)

Eine Imbisskette mit sehr vielen Kunden hat eine Langzeitstudie zum Kaufverhalten ihrer Kunden erarbeiten lassen. Dabei wurde festgestellt, dass 40% der Kunden männlich sind und 50% aller Kunden morgens einkaufen. 35% aller Kunden sind weiblich und kaufen morgens nicht ein. Betrachtet werden die nachstehenden Ereignisse:

A - Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich.

B - Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft morgens (Morgenkauf).

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse. Verwenden Sie die korrekte Fachsprache.

E1 - Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich und kauft morgens.

E2 - Ein zufällig ausgewählter Kunde ist weiblich oder kauft morgens.

E3 - Ein Kunde der morgens kauft, ist weiblich.

E4 - Ein Kunde, der weiblich ist, kauft nicht morgens.

b) Untersuchen Sie die Ereignisse A und B auf stochastische Unabhängigkeit.

Aufgabe 6 (5 BE)

Am 17.10.2019 waren an den öffentlichen Schulen in Mecklenburg-Vorpommern 10.051 Lehrkräfte beschäftigt[1]. Davon waren 7.855 weiblich. Es gab zu dieser Zeit 742 Lehrer und 1.519 Lehrerinnen, die unter 40 Jahre alt waren. Bestimmen Sie, die Anzahl und den Anteil der Lehrerinnen mit mindestens 40 Jahren und der Lehrkräfte insgesamt, die mindestens 40 Jahre alt waren. Geben Sie neben den absoluten Zahlen auch die Prozentangabe an.

Aufgabe 7 (4 + 3 BE)

Eine Umfrage an Schulen über die Essgewohnheiten der Schüler:innen ergab, dass 45% aller Schüler:innen gerne Schokolade essen. 60% aller Schüler:innen gaben an, Geschwister zu haben. 27% aller Schüler:innen haben Geschwister und essen gerne Schokolade.

a) Stellen Sie die Ereignisse der Umfrage in Form einer Vierfeldertafel und eines Baumdiagrammes dar.

b) Um Werbung besser platzieren zu können, interessiert sich ein Schokoladenhersteller dafür, ob Schüler:innen mit Geschwister eine besondere Vorliebe für Schokolade haben. Untersuchen diese beiden Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit.

Aufgabe 8 (5 + 8 + 10 BE)

In einer Fabrik werden Elektronikbauteile gefertigt, welche vor der Auslieferung kontrolliert werden. In der folgenden Aufgabe tritt das Ereignis F ein, wenn ein Bauteil funktionstüchtig ist. Das Ereignis K tritt ein, wenn ein Bauteil die Kontrolle passiert. Insgesamt sind 90% der Bauteile funktionstüchtig. In der Kontrolle werden 95% der Bauteile, die nicht funktionstüchtig sind, als solche erkannt und sie passieren die Kontrolle somit nicht. Allerdings kommt es auch bei 2% der funktionstüchtigen Bauteile vor, dass sie wegen eines Messfehlers irrtümlich als nicht funktionstüchtig angezeigt werden und die Kontrolle nicht passieren.

a) Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in zwei verschiedenen, vollständig beschrifteten Baumdiagrammen dar.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit und korrekte Verwendung der Fachsprache.

E1 - Ein zufällig ausgewähltes Bauteil ist nicht funktionstüchtig und passiert die Kontrolle.

E2 - Ein zufällig ausgewähltes Bauteil passiert die Kontrolle nicht.

E3 - Ein zufällig ausgewähltes Bauteil ist nicht funktionstüchtig oder es passiert die Kontrolle nicht.

E4 - Ein Bauteil, welches die Kontrolle nicht passiert ist nicht funktionstüchtig.

c) Geben Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten an und beschreiben Sie die dazugehörigen Ereignisse in Worten.

$$P(\overline{F} \cap \overline{K})\ ;\ P(F \cup K)\ ;\ P_{\overline{K}}(F)\ ;\ P(\overline{F \cup K})\ ;\ P_K(\overline{F})$$

[1] Online unter: `https://bit.ly/2Cln5KQ`

Aufgaben zu Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln (28.04.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (9 BE)

In seinem Stream „Spaß mit Flaggen“ stellt Sheldon Cooper erstaunliche Informationen über Flaggen zusammen:

① FLAGGEN IN PASADENA

	vor öffentl. Gebäuden	vor priv. Gebäuden	
hängen richtig	871	378	1249
hängen falsch	237	519	756
	1108	897	2005

② ONLINEUMFRAGE ZUM WEBSTREAM

	kennen den Stream	kennen den Stream nicht	
♂	52 %		
♀	13%		
	65 %	35%	100%

a) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel und die Kontingenztafel so weit wie möglich.
Siehe Bild.

b) Fertigen Sie aus der Vierfeldertafel über Flaggen in Pasadena zwei Baumdiagramme an.

Werden noch eingefügt, wenn mein Programm MatheGrafix wieder geht.

c) Geben Sie an, welcher Prozentsatz an Flaggen vor Privatgebäuden in Pasadena falsch hängt.

519 Flaggen von den 897 Flaggen vor Privatgebäuden hängen falsch, also: $\frac{519}{897} \approx 57,9\%$

d) Der Internetuser *RouladenRalf72* postet zu der Umfrage:
„Männer und Flaggen passen einfach besser zusammen – 52 % der Leute, die den Stream kennen, sind Männer!“
Beurteilen Sie diese Aussage auf Grundlage der vorliegenden mathematischen Daten.

Die Aussage ist falsch, da 52% aller Personen männlich sind und den Stream kennen. Von den Personen, die den Stream kennen sind $\frac{52}{65} = 80\%$ Männer.

e) Sheldon wählt sich live in die Umfrage ein. Er notiert die Ergebnisse der nächsten drei Teilnehmer*innen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ...

A ... alle drei Teilnehmer*innen den Webstream kennen.

$P(A) = 0,65^3 \approx 27,5\%$

B ... alle drei Teilnehmer*innen männliche User sind, die den Webstream kennen.

$P(B) = 0,52^3 \approx 14,1\%$

Aufgabe 2 (4 BE)

Die Ostsee ist ein beliebtes Urlaubsziel. Es wird geschätzt, dass 68% aller Gäste aus dem Inland kommen. 60% der Gäste, die aus dem Inland kommen, besuchen während ihres Aufenthaltes an der Ostsee auch die Wälder Mecklenburgs. Weiterhin ist bekannt, dass 80% der Gäste, die aus dem Ausland kommen, die Wälder besuchen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Tourist, der an der Ostsee seinen Urlaub verbracht hat Inländer ist und in den Wäldern war. Ermitteln Sie wie viele von 1.000 Touristen ausschließlich die Ostsee besuchen werden.

	Inland	Ausland	gesamt
besuchen die Wäler	408	256	664
besuchen nicht die Wälder	272	64	336
gesamt	680	320	1.000

$P(A) = \frac{408}{1000} = 40,8\%$ 336 Touristen von 1.000 besuchen ausschließlich die Ostsee.

Aufgabe 3 (3 BE)

Sir Francis Galton (1822–1911) hat untersucht, ob es Zusammenhänge zwischen der Augenfarbe des Vaters und der Augenfarbe des Sohnes gibt. Dazu hat er 1.000 Väter mit ihren Söhnen analysiert und kam auf folgende Auszählungen:

	Vater helläugig	Vater dunkeläugig	gesamt
Sohn helläugig	471	148	619
Sohn dunkeläugig	151	230	381
gesamt	622	378	1.000

Untersuchen Sie mit Regeln der Vierfeldertafel, ob diese Ereignisse unabhängig oder abhängig voneinander sind.

Stochastisch unabhängig heißt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. In unserem Beispiel müsste also beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass Vater und Sohn helläugig sind die Wahrscheinlichkeit für einen helläugigen Sohn multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit für einen helläugigen Vater sein.

Symbolisch: P(Vater helläugig $\cap$ Sohn helläugig)=0,471$\neq 0,622 \cdot 0,619$ $\rightarrow$ die Ereignisse sind nicht unabhängig, also sind sie abhängig. (Geburtsstunde der Vererbungslehre)

Aufgabe 4 (3+3+2 BE) – IQB Aufgabe 2018

Von allen Jugendlichen eines Landes im Alter von 14 bis 25 Jahren sind 49,20% weiblich. 47,10% der Jugendlichen erledigen ihre Finanzangelegenheiten regelmäßig mittels Smartphone oder Tablet. Der Anteil der Jugendlichen, die weiblich sind und ihre Finanzangelegenheiten regelmäßig mittels Smartphone oder Tablet erledigen, beträgt 19,68%.

a) Stellen Sie den beschriebenen Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

	weiblich	männlich	gesamt
Finanzangelegenheiten mit Smartphone/Tablet	19,68%	27,42%	47,10%
Finanzangelegenheiten nicht mit Smartphone/Tablet	29,52%	23,38%	52,90%
gesamt	49,20%	50,80%	100%

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine unter den Jugendlichen zufällig ausgewählte Person entweder männlich ist oder ihre Finanzangelegenheiten regelmäßig mittels Smartphone oder Tablet erledigt.

P(weiblich ∩ Finanzangel. mit S/T) + P(männlich ∩ Finanzange ohne S/T) = 19,68%+23,38%=43,06%

c) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine unter den weiblichen Jugendlichen zufällig ausgewählte Person ihre Finanzangelegenheiten regelmäßig mittels Smartphone oder Tablet erledigt, 40% beträgt.

$\frac{19{,}68}{49{,}20} = 0,4 = 40\%$

Aufgabe 5 (8 + 3 BE)

Eine Imbisskette mit sehr vielen Kunden hat eine Langzeitstudie zum Kaufverhalten ihrer Kunden erarbeiten lassen. Dabei wurde festgestellt, dass 40% der Kunden männlich sind und 50% aller Kunden morgens einkaufen. 35% aller Kunden sind weiblich und kaufen morgens nicht ein. Betrachtet werden die nachstehenden Ereignisse:

A - Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich.

B - Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft morgens (Morgenkauf).

	A	$\overline{A}$	gesamt
B	15 %	35 %	50 %
$\overline{B}$	25 %	25 %	50 %
gesamt	40 %	60 %	100 %

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse. Verwenden Sie die korrekte Fachsprache.

E1 - Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich und kauft morgens.

$P(E_1) = P(A \cap B) = 15\%$

E2 - Ein zufällig ausgewählter Kunde ist weiblich oder kauft morgens.

$P(E_2) = P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 85\%$

E3 - Ein Kunde der morgens kauft, ist weiblich.

$P(E_3) = P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{35\%}{50\%} = 70\%$

E4 - Ein Kunde, der weiblich ist, kauft nicht morgens.

$P(E_4) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \dfrac{25\%}{60\%} \approx 41,67\%$

b) Untersuchen Sie die Ereignisse A und B auf stochastische Unabhängigkeit.

Die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig, dies ist daran erkennbar, dass beispielsweise $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ gilt.
$P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \neq 0,15 = P(A \cap B)$.

Aufgabe 6 (5 BE)

Am 17.10.2019 waren an den öffentlichen Schulen in Mecklenburg-Vorpommern 10.051 Lehrkräfte beschäftigt[1]. Davon waren 7.855 weiblich. Es gab zu dieser Zeit 742 Lehrer und 1.519 Lehrerinnen, die unter 40 Jahre alt waren. Bestimmen Sie, die Anzahl und den Anteil der Lehrerinnen mit mindestens 40 Jahren und der Lehrkräfte insgesamt, die mindestens 40 Jahre alt waren. Geben Sie neben den absoluten Zahlen auch die Prozentangabe an.

	weiblich	männlich	gesamt
Unter 40 Jahre	1.519	742	2.261
Mindestens 40 Jahre	6.336	1.454	7.790
gesamt	7.855	2.196	10.051

6.336 Lehrerinnen sind mindestens 40 Jahre als, das sind von allen Lehrkräften $\frac{6.336}{10.051} \approx 63,0\%$ und von den mindestens 40 Jährigen sind es $\frac{6.336}{7.790} \approx 81,3\%$.
Insgesamt sind $\frac{7.790}{10.051} \approx 77,5\%$ der Lehrkräfte mindestens 40 Jahre alt.

Aufgabe 7 (4 + 3 BE)

Eine Umfrage an Schulen über die Essgewohnheiten der Schüler:innen ergab, dass 45% aller Schüler:innen gerne Schokolade essen. 60% aller Schüler:innen gaben an, Geschwister zu haben. 27% aller Schüler:innen haben Geschwister und essen gerne Schokolade.

a) Stellen Sie die Ereignisse der Umfrage in Form einer Vierfeldertafel und eines Baumdiagrammes dar.

	Geschwister	keine Geschwister	gesamt
Schokolade	27 %	18 %	45 %
keine Schokolade	33 %	22 %	55 %
gesamt	60 %	40 %	100 %

Baumdiagramme folgen, sobald mein Programm wieder geht.

b) Um Werbung besser platzieren zu können, interessiert sich ein Schokoladenhersteller dafür, ob Schüler:innen mit Geschwister eine besondere Vorliebe für Schokolade haben. Untersuchen diese beiden Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit.

Die Ereignisse sind stochastisch unabhängig, da gilt

$$P(G \cap Sch) = 0,27 = 0,6 \cdot 0,45 = P(G) \cdot P(Sch)$$

$$P(Sch \cap \overline{G}) = 0,18 = 0,45 \cdot 0,4 = P(Sch) \cdot P(\overline{G})$$

Und auch die anderen Produkte gelten (nachweisen!).

[1] Online unter: `https://bit.ly/2Cln5KQ`

Aufgabe 8 (5 + 8 + 10 BE)

In einer Fabrik werden Elektronikbauteile gefertigt, welche vor der Auslieferung kontrolliert werden. In der folgenden Aufgabe tritt das Ereignis F ein, wenn ein Bauteil funktionstüchtig ist. Das Ereignis K tritt ein, wenn ein Bauteil die Kontrolle passiert. Insgesamt sind 90% der Bauteile funktionstüchtig. In der Kontrolle werden 95% der Bauteile, die nicht funktionstüchtig sind, als solche erkannt und sie passieren die Kontrolle somit nicht. Allerdings kommt es auch bei 2% der funktionstüchtigen Bauteile vor, dass sie wegen eines Messfehlers irrtümlich als nicht funktionstüchtig angezeigt werden und die Kontrolle nicht passieren.

	F	$\overline{F}$	gesamt
K	88,2 %	0,5 %	88,7 %
$\overline{K}$	1,8 %	9,5 %	11,3 %
gesamt	90 %	10 %	100 %

a) Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in zwei verschiedenen, vollständig beschrifteten Baumdiagrammen dar.

Auch hier wieder die Antwort, dass dies noch folgt.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit und korrekte Verwendung der Fachsprache.

E1 - Ein zufällig ausgewähltes Bauteil ist nicht funktionstüchtig und passiert die Kontrolle.

$P(E_1) = P(\overline{F} \cap K) = 0,5\%$

E2 - Ein zufällig ausgewähltes Bauteil passiert die Kontrolle nicht.

$P(E_2) = P(\overline{K}) = 11,3\%$

E3 - Ein zufällig ausgewähltes Bauteil ist nicht funktionstüchtig oder es passiert die Kontrolle nicht.

$P(E_3) = P(\overline{F} \cup \overline{K}) = P(\overline{F}) + P(\overline{K}) - P(\overline{F} \cap \overline{K}) = 11,8\%$

E4 - Ein Bauteil, welches die Kontrolle nicht passiert ist nicht funktionstüchtig.

$P(E_1) = P_{\overline{K}}(\overline{F}) = \dfrac{P(\overline{K} \cap \overline{F})}{P(\overline{K})} = \dfrac{9,5\%}{11,3\%} \approx 84,07\%$

c) Geben Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten an und beschreiben Sie die dazugehörigen Ereignisse in Worten.

$P(\overline{F} \cap \overline{K}) = 0,095$ – Ein Bauteil ist nicht funktionsfähig und passiert die Kontrolle nicht.

$P(F \cup K) = P(F) + P(K) - P(F \cap K) = 0,905$ – Ein Bauteil ist funktionsfähig oder passiert die Kontrolle.

$P_{\overline{K}}(F) = \dfrac{P(\overline{K} \cap F)}{P(\overline{K})} = \dfrac{1,8\%}{11,3\%} \approx 0,1593$ – Ein Bauteil, das die Kontrolle nicht passiert, ist funktionstüchtig.

$P(\overline{F \cup K}) = 1 - P(F \cup K) = 1 - (P(F) + P(K) - P(F \cap K)) = 0,095$ – Ein Bauteil ist nicht funktionsfähig oder passiert die Kontrolle nicht.

$P_K(\overline{F}) = \dfrac{P(K \cap \overline{F})}{P(K)} = \dfrac{0,5\%}{88,7\%} \approx 0,0056$ – Ein Bauteil, das die Kontrolle passiert, ist nicht funktionsfähig.

Aufgaben zu Diskreten Zufallsgrößen (13.05.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

Geben Sie zu jedem Zufallsexperiment die Werte an, welche von der Zufallsgröße angenommen werden können (jeweils 1 BE). Beschreiben Sie die gegebenen Ereignisse mit Worten (jeweils 1 BE).

a) Zwei Würfel werden geworfen und die Augenzahlen werden addiert. Die Zufallsgröße W ist die Augensumme.

$$W = 6$$

b) Eine Münze wird sechs mal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft Zahl oben lag.

$$X < 3$$

c) Eine Familie mit vier Kindern wird zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Y gibt an, wie viele Mädchen unter den Kindern der Familie sind.

$$Y \geqq 2$$

d) Die Zufallsgröße A gibt die Anzahl der Personen in der Klasse 11A an einem Schultag an.

$$A \geqq 14$$

Aufgabe 2 (10 BE)

Das Histogramm stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X - *Augensumme beim Werfen zweier Würfel* dar. Nur die Wahrscheinlichkeit für $X = 7$ fehlt.

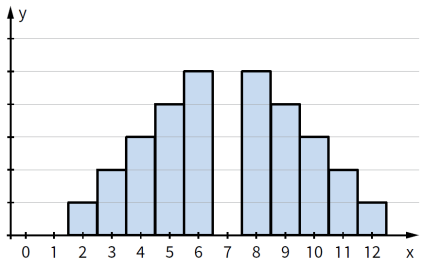


Abbildung 1: EdM 11 Sachsen, S. 280, HW

a) Bestimmen Sie die Werte $P(X = 2)$ und $P(X = 11)$ (2 BE)
Hinweis: Nutzen Sie hierfür ein Baumdiagramm. Dieses kann gern verkürzt gezeichnet sein.

b) Beschriften Sie die Markierungen an der Ordinatenachse mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Ergänzen Sie den fehlenden Balken an der Stelle $X = 7$. (2 BE)

c) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse mit Worten. Bestimmen Sie anschließend die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten. (6 BE)

$$X \leqq 4; X < 10; X \geqq 7$$

Aufgabe 3 (10 BE)

Schauen Sie sich den Aufgabentext von Aufgabe 6 vom 21.04.2022 an. Auf diese Aufgabe wird nun aufgebaut.
Die Zufallsgrößen X (bei Variante (1)), Y (bei Variante (2)) und Z (bei Variante (3)) beschreiben jeweils die Anzahl der Gewinne.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von X, Y und Z tabellarisch. *(Diese Aufgabe haben Sie prinzipiell schon gemacht.)*(6 BE)

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(X)$, $E(Y)$ und $E(Z)$ und beurteilen Sie diese. (4 BE)

Aufgabe 4 (13 BE)

Die Zufallsgröße X stellt den Gewinn eines Spielers in Euro dar, der bei einem Spiel erzielt werden kann. Die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in Tabellenform gegeben.

k	-5	-2	0	4	10
$P(X=k)$	$0,4$	$0,1$	$0,1$	p	$0,2$

a) Geben Sie den Wert für p an und zeichnen Sie das zu X passende Histogramm. (3 BE)

b) Geben Sie die folgenden Ereignisse und ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Variablen X an. (4 BE)

A – Der Spieler verliert Geld. B – Der Spieler gewinnt Geld.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. (4 BE)

C – Nach zweimaligem Spielen hat der Spieler insgesamt 20,00 € gewonnen.
D – Nach zweimaligem Spielen hat der Spieler insgesamt 7,00 € verloren.

d) Beurteilen Sie, ob das Spiel fair ist. (2 BE)

Aufgabe 5 (2 BE)

Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße B, welche die Werte -5,-2,1,3,7 und 11 annimmt. Tragen Sie den fehlenden Wert für $B = 11$ ins Histogramm ein und begründen Sie kurz.

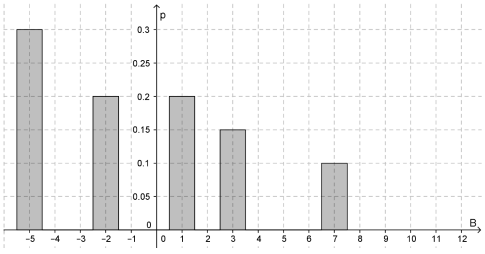


Abbildung 2: GeoGebra, Steffen Hintze 2017

Aufgaben zu Diskreten Zufallsgrößen (13.05.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

Geben Sie zu jedem Zufallsexperiment die Werte an, welche von der Zufallsgröße angenommen werden können (jeweils 1 BE). Beschreiben Sie die gegebenen Ereignisse mit Worten (jeweils 1 BE).

a) Zwei Würfel werden geworfen und die Augenzahlen werden addiert. Die Zufallsgröße W ist die Augensumme.

$$W = 6$$

$\Omega_W = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. $W = 6$ heißt: Die Augensumme ist sechs.

b) Eine Münze wird sechs mal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft Zahl oben lag.

$$X < 3$$

$\Omega_X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. $X < 3$ heißt: Es lag weniger als drei Mal Zahl oben.

c) Eine Familie mit vier Kindern wird zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Y gibt an, wie viele Mädchen unter den Kindern der Familie sind.

$$Y \geqq 2$$

$\Omega_Y = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. $Y \geqq 2$ heißt: Es sind mindestens zwei Mädchen unter den Kindern der Familie.

d) Die Zufallsgröße A gibt die Anzahl der Personen in der Klasse 11A an einem Schultag an.

$$A \geqq 14$$

$\Omega_A = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots; 17; 18; 19\}$. $A \geqq 14$ heißt: Es sind mindestens 14 Personen in der 12A anwesend.

Aufgabe 2 (10 BE)

Das Histogramm stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X - *Augensumme beim Werfen zweier Würfel* dar. Nur die Wahrscheinlichkeit für $X = 7$ fehlt.

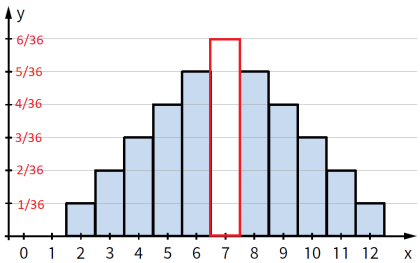


Abbildung 1: EdM 11 Sachsen, S. 280, HW

a) Bestimmen Sie die Werte $P(X = 2)$ und $P(X = 11)$ (2 BE)

$P(X = 2) = P(1; 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$;
$P(X = 11) = P(5; 6) + P(6; 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) Beschriften Sie die Markierungen an der Ordinatenachse mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Ergänzen Sie den fehlenden Balken an der Stelle $X = 7$. (2 BE)

Siehe neue Grafik.

c) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse mit Worten. Bestimmen Sie anschließend die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten. (6 BE)

$X \leqq 4$ heißt: Die Augensumme ist höchstens 4. Aus dem Histogramm kann bestimmt werden, dass $P(X \leqq 4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ist.

$X < 10$ heißt: Die Augensumme ist kleiner als 10. Aus dem Histogramm kann bestimmt werden, dass $P(X < 10) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ ist.

$X \geqq 7$ heißt: Die Augensumme ist mindestens 7. Aus dem Histogramm kann bestimmt werden, dass $P(X \geqq 7) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ ist.

Aufgabe 3 (10 BE)

Schauen Sie sich den Aufgabentext von Aufgabe 6 vom 21.05.2022 an. Auf diese Aufgabe wird nun aufgebaut.
Die Zufallsgrößen X (bei Variante (1)), Y (bei Variante (2)) und Z (bei Variante (3)) beschreiben jeweils die Anzahl der Gewinne.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von X, Y und Z tabellarisch. *(Diese Aufgabe haben Sie prinzipiell schon gemacht.)*(6 BE)

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{59}{180}$	$\frac{71}{180}$	$\frac{7}{36}$
$P(Y = k)$	$\frac{60}{1000}$	$\frac{340}{1000}$	$\frac{440}{1000}$	$\frac{160}{1000}$
$P(Z = k)$	$\frac{143}{2030}$	$\frac{663}{2030}$	$\frac{442}{1015}$	$\frac{34}{203}$

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(X)$, $E(Y)$ und $E(Z)$ und beurteilen Sie diese. (4 BE)

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{59}{180} + 2 \cdot \frac{71}{180} + 3 \cdot \frac{7}{36} = \frac{17}{10} = 1,7$

$E(Y) = 0 \cdot \frac{60}{1000} + 1 \cdot \frac{340}{1000} + 2 \cdot \frac{440}{1000} + 3 \cdot \frac{160}{1000} = \frac{17}{10} = 1,7$

$E(Z) = 0 \cdot \frac{143}{2030} + 1 \cdot \frac{663}{2030} + 2 \cdot \frac{442}{1015} + 3 \cdot \frac{34}{203} = \frac{17}{10} = 1,7$

Alle Erwartungswerte sind gleich. Der Erwartungswert ist also bei diesen Zufallsexperimenten nicht aussagekräftig.

(Nicht Teil der Aufgabe: Die Standardabweichung wäre aussagekräftiger in Bezug auf die Erwartungswerte.

$\sigma(X) = \sqrt{0 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{1}{12}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{59}{180}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{71}{180}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{7}{36}\right)^2} \approx 3,132$

$\sigma(Y) = \sqrt{0 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{60}{1000}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{340}{1000}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{440}{1000}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{160}{1000}\right)^2} \approx 3,318$

$\sigma(Z) = \sqrt{0 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{143}{2030}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{663}{2030}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{442}{1015}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{17}{10} - \frac{34}{203}\right)^2} \approx 3,111$

Am verlässlichsten ist also Variante (3), weil $\sigma(Z)$ am kleinsten ist. Wobei $\sigma(X)$ und $\sigma(Z)$ sehr nahe beieinander sind und somit auch Variante (1) und (3) recht ähnlich sind.

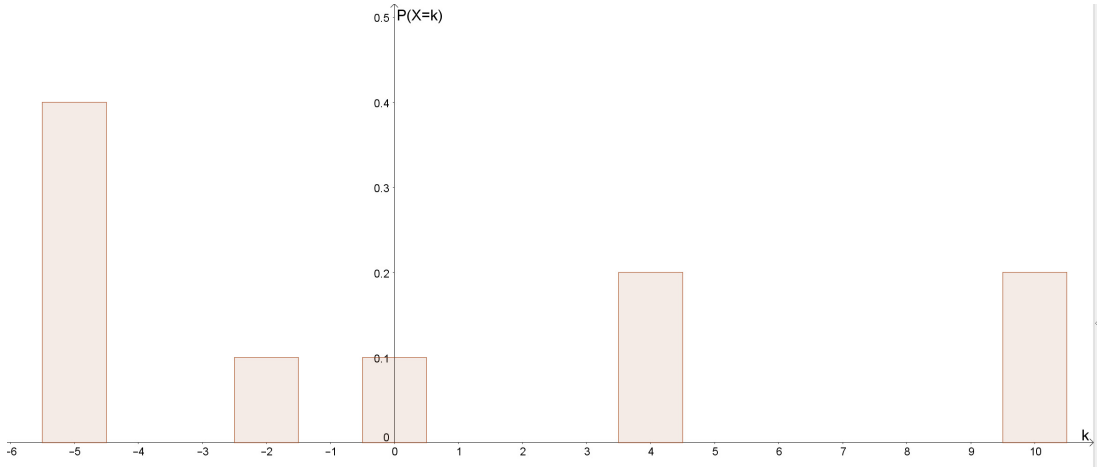
Aufgabe 4 (13 BE)

Die Zufallsgröße X stellt den Gewinn eines Spielers in Euro dar, der bei einem Spiel erzielt werden kann. Die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in Tabellenform gegeben.

k	-5	-2	0	4	10
$P(X=k)$	$0,4$	$0,1$	$0,1$	p	$0,2$

a) Geben Sie den Wert für p an und zeichnen Sie das zu X passende Histogramm. (3 BE)

$p = 0,2$



b) Geben Sie die folgenden Ereignisse und ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Variablen X an. (4 BE)

A – Der Spieler verliert Geld. $P(A) = P(X < 0) = 0,5$

B – Der Spieler gewinnt Geld. $P(B) = P(X > 0) = 0,4$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. (4 BE)

C – Nach zweimaligem Spielen hat der Spieler insgesamt 20,00 € gewonnen.

$P(C) = P(10; 10) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$

D – Nach zweimaligem Spielen hat der Spieler insgesamt 7,00 € verloren.

$P(D) = P(-5; -2) + P(-2; -5) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,08$

d) Beurteilen Sie, ob das Spiel fair ist. (2 BE)

$E(X) = -5 \cdot 0,4 - 2 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,2 = 0,6 > 0 \rightarrow$ das Spiel ist nicht fair, da es vorteilhaft für die spielende Person ist.

Aufgabe 5 (2 BE)

Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße B, welche die Werte -5,-2,1,3,7 und 11 annimmt. Tragen Sie den fehlenden Wert für $B = 11$ ins Histogramm ein und begründen Sie kurz.

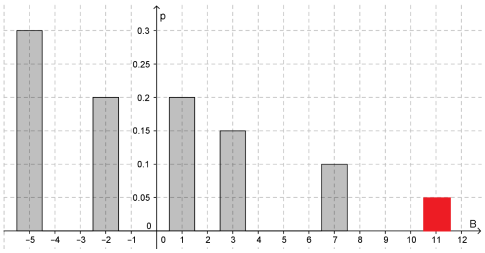


Abbildung 2: GeoGebra, Steffen Hintze 2017

Es ist $P(X = -5) + P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 7) = 0,95$, also muss $P(X = 11) = 0,05$ sein, da dies einerseits der einzige Wert der Zufallsgröße ist, der noch fehlt und andererseits dies noch bis zur 1 (sicheres Ereignis) fehlt.

Aufgaben zur Binomialverteilung (10.06.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

2014 brach die Ebolafieber-Epidemie in den westafrikanischen Ländern (Guinea, Liberia, Sierra Leone, Nigeria, Senegal und Mali) aus. Dabei hat die Untersuchung und Dokumentation des klinischen Verlaufs ergeben, dass nach Ausbruch der Epidemie 70,8% der Betroffenen gestorben sind.[1]

a) Begründen Sie, warum dies 2014 als binomialverteiltes Zufallsexperiment mit Zufallsgröße X: *Anzahl der infizierten Personen, die an Ebola sterben*, betrachtet werden konnte. (2 BE)

b) Eine Hilfsorganisation kümmert sich um 1.000 infizierte Personen. Berechnen Sie, wie viele Tote zu erwarten sind. (1 BE)

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse an (3 BE):

   A: 700 bis 720 infizierte Personen erliegen der Krankheit.

   B: Mehr als 680 infizierte Personen sterben.

   C: Weniger als 250 infizierte Personen überleben.

d) Bestimmen Sie eine Mindest- und eine Höchstanzahl der Toten, sodass 99% aller erwartbaren Fälle erfasst sind. (2 BE)
Hinweis: Schauen Sie in gleichen Abständen links und rechts vom Erwartungswert nach kumulierten Wahrscheinlichkeiten, bis Sie das erste Mal auf 0,99 kommen.

Aufgabe 2 (2 + 1 + 3 = 6 BE)

3.3.1 Es ist bekannt, dass bei der Produktion von Kondensatoren 7 % fehlerhaft sind.
Der laufenden Produktion werden zufällig 500 Kondensatoren entnommen und auf Funktionstüchtigkeit überprüft.

Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment als Bernoulli-Experiment betrachtet werden darf.

Berechnen Sie die Anzahl der defekten Kondensatoren, die zu erwarten ist.

Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit.
A: Genau 30 Kondensatoren sind defekt.
B: Höchstens 40 Kondensatoren sind defekt.
C: Die Anzahl der Kondensatoren ohne Fehler ist größer als 460 aber kleiner als 470.

Abbildung 1: Abitur M-V A3, 2013

[1] https://www.nejm.org/doi/full/10.1056/NEJMoa1411100

Aufgabe 3 (6 BE)

6% aller Deutschen haben die Blutgruppe 0-, welche für alle Empfänger verträglich ist.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 85%iger Wahrscheinlichkeit mindestens vier Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

Aufgabe 4 (14 BE)

3.4 Aus der Erfahrung weiß man, dass etwa 80 % der medizinischen Einrichtungen Deutschlands in der Radiodiagnostik Präparate mit ^{99m}Tc verwenden.

3.4.1 Fünf zufällig ausgewählte Einrichtungen werden zum Einsatz dieser Präparate befragt. Die Zufallsgröße X entspricht der Anzahl der Einrichtungen, die Präparate mit ^{99m}Tc einsetzen. 7 BE

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angenommen werden kann.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und stellen Sie diese grafisch dar.

3.4.2 Bei einer anderen Erhebung wurden 50 Einrichtungen befragt. 7 BE

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: 90 % der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

B: Mindestens 30, aber weniger als 40 der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis an:

C: Die zweite Einrichtung setzt dieses Präparat ein.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis:

D: Genau eine der ersten vier Einrichtungen setzt diese Präparat ein.

Abbildung 2: Abitur M-V A3, 2018

Aufgabe 5 (3 BE)

Zeigen Sie im Fall $n = 3$, dass für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt: $\mu = 3 \cdot p$.
Hinweis: Nutzen Sie $\mu = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3)$

Aufgabe 6 (2+3+2+3+2+4+4 BE) – IQB-Aufgabe 2017

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.
1. Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones

a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräte im Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl.

b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte, davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft."

B: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft."

2. Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt. Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte;
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil der Gesamtzahl	10 %	30 %	20 %	40 %
Anteil der fehlerhaften Geräte	5 %	3 %	4 %	2 %

a) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt.

b) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

c) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 250 zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die darunter mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

d) Geben Sie einen Wert von s an, für den mit dem Term $200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02 + 0,98^{200}$ im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.

e) Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 500 Geräte befinden, die nicht fehlerhaft sind.

Aufgabe 7 (4+2+2+3+4+2+3 BE) – IQB-Aufgabe 2019

In einer Urne befinden sich Kugeln. 35 % der Kugeln sind mit „+1“ beschriftet, 25 % mit „+2“, die übrigen mit „-3“.

1. a) 100-mal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

   A: „Mehr als 30 und weniger als 45 der entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“
   B: „Die ersten drei entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“

   b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der in der Urne insgesamt enthaltenen Kugeln kleiner als 100 sein kann.

2. Unter Verwendung der Urne wird ein Spiel durchgeführt. Dabei wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zahlen auf den entnommenen Kugeln werden addiert. Ist das Ergebnis positiv, gewinnt der Spieler den Wert der Summe als Betrag in Euro, ist das Ergebnis negativ, verliert er den entsprechenden Betrag.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel mehr als 3 Euro gewinnt.

   b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel einen Gewinn erzielt 36 % beträgt.

   c) Ermitteln Sie für einen Spieler mithilfe eines Baumdiagramms den durchschnittlichen Verlust pro Spiel.

3. Die Anzahl der in der Urne tatsächlich enthaltenen Kugeln ist n. In die Urne werden zwei zusätzliche Kugeln gelegt, eine davon ist mit „+1“ beschriftet, die andere mit „+2“. Anschließend wird eine Kugel zufällig entnommen.

   a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, durch den Term $\frac{0,35n+1}{n+2}$ angegeben wird.

   b) Durch das Hinzufügen nimmt sowohl die Wahrscheinlichkeit dafür zu, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, als auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+2“ beschriftet ist. Entscheiden Sie, für welche der beiden Wahrscheinlichkeiten die Zunahme größer ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgaben zur Binomialverteilung (10.06.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

2014 brach die Ebolafieber-Epidemie in den westafrikanischen Ländern (Guinea, Liberia, Sierra Leone, Nigeria, Senegal und Mali) aus. Dabei hat die Untersuchung und Dokumentation des klinischen Verlaufs ergeben, dass nach Ausbruch der Epidemie 70,8% der Betroffenen gestorben sind.[1]

a) Begründen Sie, warum dies 2014 als binomialverteiltes Zufallsexperiment mit Zufallsgröße X: *Anzahl der infizierten Personen, die an Ebola sterben*, betrachtet werden konnte. (2 BE)

Es gibt nur zwei Ergebnisse: Die Person stirbt an Ebola und die Person stirbt nicht an Ebola. Außerdem verändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, da es noch kein Heilmittel zu dem Zeitpunkt gab und daher die Krankheit kaum bekämpft werden konnte.

b) Eine Hilfsorganisation kümmert sich um 1.000 infizierte Personen. Berechnen Sie, wie viele Tote zu erwarten sind. (1 BE)

$B_{1.000;0,708}$ – Begründung siehe Aufgabe a). $\mu = 1.000 \cdot 0,708 = 708$
Es sind 708 Tote bei 1.000 Infizierten zu erwarten.

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse an (3 BE):

A: 700 bis 720 infizierte Personen erliegen der Krankheit.

$P(A) = P(700 \leqq X \leqq 720) \approx 0,5312$

B: Mehr als 680 infizierte Personen sterben.

$P(B) = P(X > 680) \approx 0,9713$

C: Weniger als 250 infizierte Personen überleben.

$B_{1.000;0,292}$ mit Zufallsgröße Y: *Anzahl der infizierten Personen, die Ebola überleben*
$P(C) = P(Y < 250) = P(X > 750) \approx 0,0014$

d) Bestimmen Sie eine Mindest- und eine Höchstanzahl der Toten, sodass 99% aller erwartbaren Fälle erfasst sind. (2 BE)
Hinweis: Schauen Sie in gleichen Abständen links und rechts vom Erwartungswert nach kumulierten Wahrscheinlichkeiten, bis Sie das erste Mal auf 0,99 kommen.

Der Erwartungswert ist $\mu = 708$. Nun folgt eine Lösung durch systematisches Probieren.

Dafür wird ein beliebiger Abstand links und rechts von μ genutzt: $P(\mu - 8 \leqq X \leqq \mu + 8) = P(700 \leqq X \leqq 716) \approx 0,4456$, also sind 44,56% der Fälle damit erfasst.

$P(\mu - 20 \leqq X \leqq \mu + 20) = P(688 \leqq X \leqq 728) \approx 0,8461$, also 84,61 % der Fälle.

$P(\mu - 30 \leqq X \leqq \mu + 30) = P(678 \leqq X \leqq 738) \approx 0,9662$, also 96,62 % der Fälle.

$P(\mu - 36 \leqq X \leqq \mu + 36) = P(672 \leqq X \leqq 744) \approx 0,9889$, also 98,89 % der Fälle.

$P(\mu - 37 \leqq X \leqq \mu + 37) = P(671 \leqq X \leqq 745) \approx 0,9909$, also 99,09 % der Fälle.

$\rightarrow$ Es ist zu 99 % mit 671 bis 745 Toten zu rechnen.

[1] https://www.nejm.org/doi/full/10.1056/NEJMoa1411100

Aufgabe 2 (2 + 1 + 3 = 6 BE)

3.3.1 **Es ist bekannt, dass bei der Produktion von Kondensatoren 7 % fehlerhaft sind.**
Der laufenden Produktion werden zufällig 500 Kondensatoren entnommen und auf Funktionstüchtigkeit überprüft.

Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment als Bernoulli-Experiment betrachtet werden darf.

Berechnen Sie die Anzahl der defekten Kondensatoren, die zu erwarten ist.

Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit.
A: Genau 30 Kondensatoren sind defekt.
B: Höchstens 40 Kondensatoren sind defekt.
C: Die Anzahl der Kondensatoren ohne Fehler ist größer als 460 aber kleiner als 470.

Abbildung 1: Abitur M-V A3, 2013

$B_{500;0,07}$ kann angenommen werden, weil es fehlerhafte und nicht fehlerhafte Kondensatoren sind und außerdem ändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, da es sich um einen bekannten Anteil aus einer Produktion handelt.

$\mu = 500 \cdot 0,07 = 35$. Es sind 35 fehlerhafte Kondensatoren zu erwarten.

Sei die Zufallsgröße X: *Anzahl der fehlerhaften Kondensatoren*:
$P(A) = P(X = 30) \approx 0,0501$ $\qquad$ $P(B) = P(X \leqq 40) \approx 0,8331$

$B_{500;0,93}$ und Y: *Anzahl der Kondensatoren ohne Fehler*
$\rightarrow \quad P(C) = P(460 < Y < 470) \approx 0,5698$ $\quad$ Mit X wäre es $P(30 < X < 40) \approx 0,5698$

Aufgabe 3 (6 BE)

6% aller Deutschen haben die Blutgruppe 0-, welche für alle Empfänger verträglich ist.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

$P(X \geqq 1) \geqq 0,95$

Rechnerische Lösung: $P(X \geqq 1) \geqq 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geqq 0,95 \Leftrightarrow 0,05 \geqq P(X = 0)$
$\Leftrightarrow 0,05 \geqq \binom{n}{0} \cdot 0,06^0 \cdot 0,94^n \Leftrightarrow 0,05 \leqq 0,94^n \rightarrow n \geqq 48,4$

Systematisches Probieren: Für $B_{40;0,06} : P(X \geqq 1) \approx 0,9158$ (zu klein)
...Für $B_{48;0,06} : P(X \geqq 1) \approx 9487$ (zu klein) und für $B_{49,0,06} : P(X \geqq 1) \approx 0,9518$

Bei 49 Spendern ist mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Spender mit Blutgruppe 0 dabei.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

$P(X \geqq 2) \geqq 0,90$

Systematisches Probieren: Für $B_{50;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,8100$ (zu klein).
Für $B_{60;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,8821$ (zu klein). Für $B_{70;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,9281$ (zu groß).
Für $B_{63;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,8982$ (zu klein). Für $B_{64;0,06}: P(X \geqq 2) \approx 0,90307$

Bei 64 Spendern sind mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Spender mit Blutgruppe 0 dabei.

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit mindestens 85%iger Wahrscheinlichkeit mindestens vier Spender mit Blutgruppe 0- zu haben. (2 BE)

$P(X \geqq 4) \geqq 0,85$

Systematisches Probieren: Für $B_{90;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,7955$ (zu klein).
Für $B_{100;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8570$ (zu groß). Für $B_{95;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8285$ (zu klein).
Für $B_{98;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8461$ (zu klein). Für $B_{99;0,06}: P(X \geqq 4) \approx 0,8516$

Bei 99 Spendern sind mit mindestens 85%iger Wahrscheinlichkeit mindestens vier Spender mit Blutgruppe 0 dabei.

Aufgabe 4 (14 BE)

3.4 Aus der Erfahrung weiß man, dass etwa 80 % der medizinischen Einrichtungen Deutschlands in der Radiodiagnostik Präparate mit ^{99m}Tc verwenden.

3.4.1 Fünf zufällig ausgewählte Einrichtungen werden zum Einsatz dieser Präparate befragt. Die Zufallsgröße X entspricht der Anzahl der Einrichtungen, die Präparate mit ^{99m}Tc einsetzen. 7 BE

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angenommen werden kann.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und stellen Sie diese grafisch dar.

3.4.2 Bei einer anderen Erhebung wurden 50 Einrichtungen befragt. 7 BE

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: 90 % der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

B: Mindestens 30, aber weniger als 40 der befragten Einrichtungen setzen das Präparat ^{99m}Tc ein.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis an:

C: Die zweite Einrichtung setzt dieses Präparat ein.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis:

D: Genau eine der ersten vier Einrichtungen setzt diese Präparat ein.

Abbildung 2: Abitur M-V A3, 2018

3.4.1 Es gibt die Ergebnisse, dass die Einrichtungen die Präparate mit ^{99m}Tc einsetzen oder eben nicht einsetzen. Außerdem verändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht, da dies ein deutschlandweiter Anteil ist.

$B_{5;0,8}$ kann also angenommen werden und dafür die Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgestellt

werden. Hier wird dies nur mit hilfe der Rechnungen (nicht tabellarisch) dargestellt. Das Histogramm muss selbstständig gezeichnet werden.

$P(X=0) \approx 0,0003$; $P(X=1) \approx 0,0064$; $P(X=2) \approx 0,0512$;
$P(X=3) \approx 0,2048$; $P(X=4) \approx 0,4096$; $P(X=5) \approx 0,3277$

3.4.2 $B_{50;0,8}$ kann angenommen werden aufgrund von 3.4.1

90% von 50 Einrichtungen sind 45 Einrichtungen $\rightarrow P(A) = P(X=45) \approx 0,0295$

$P(B) = P(30 \leqq X < 40) \approx 0,4161$

$P(C) = 0,8$, da die Wahrscheinlichkeit sich auch für die zweite Einrichtung 80% ist und gleich bleibt (Bedingung der Binomialverteilung).

Für $P(D)$ muss $B_{4;0,8}$ angenommen werden, da es nur um (die ersten) 4 Einrichtungen geht:
$P(D) = P(X=1) \approx 0,0256$

Aufgabe 5 (3 BE)

Zeigen Sie im Fall $n=3$, dass für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt: $\mu = 3 \cdot p$.
Hinweis: Nutzen Sie $\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$

Wie bereits im Hinweis mitgeteilt, berechnet sich der Erwartungswert für $n=3$ durch die Formel:

$$\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$$

Es gilt:

$P(X=0) = \binom{3}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^3 = 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^3) = (1-p)^3$

$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^2 = 3 \cdot p \cdot (1-p)^2 = 3p \cdot (1-2p+p^2) = 3p - 6p^2 + 3p^3$

$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^1 = 3 \cdot p^2 \cdot (1-p) = 3p^2 - 3p^3$

$P(X=3) = \binom{3}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^0 = 1 \cdot p^3 \cdot 1 = p^3$

Also ist

$\mu = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$

$\mu = 0 \cdot (1-p)^3 + 1 \cdot (3p - 6p^2 + 3p^3) + 2 \cdot (3p^2 - 3p^3) + 3 \cdot p^3$

$\mu = 0 + 3p - 6p^2 + 3p^3 + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3$

$\mu = 3p - 6p^2 + 6p^2 + 6p^3 - 6p^3$

$\mu = 3p$

Aufgabe 6 (2+3+2+3+2+4+4 BE) – IQB-Aufgabe 2017

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.
1. Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones

a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräte im Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl.

Für das erste Gerät stehen sechs Farben zur Verfügung, für das zweite dann nur noch fünf, für das dritte stehen vier Farben zur Verfügung und für das vierte und letzte Gerät gibt es noch drei mögliche Farben. Daher berechnet sich die Anzahl der Möglichkeiten durch:
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte, davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt. Dadurch, dass 10 gleichzeitig ausgewählt werden, ist das wie „Ziehen ohne Zurücklegen“ also kann keine Binomialverteilung angenommen werden!!!

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft.“

$P(A) = \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{43}{46} \cdot \frac{42}{45} \cdot \frac{41}{44} \cdot \frac{40}{43} \cdot \frac{39}{42} \cdot \frac{38}{41} = \frac{247}{490} \approx 0,5041$

B: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft.“

$P(B) = 1 - P(A) \approx 0,4959$

2. Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt. Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte;
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil der Gesamtzahl	10 %	30 %	20 %	40 %
Anteil der fehlerhaften Geräte	5 %	3 %	4 %	2 %

a) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt.

$E(X) = 0,1 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,03$
Daher sind ca. 3 % fehlerhafte Geräte zu erwarten.

b) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

Dass das Gerät fehlerhaft ist, ist bekannt. Nun muss bestimmt werden, welchen Anteil, die fehlerhaften Geräte aus Werk A an den fehlerhaften Geräten ausmacht. Daher rechnet man:

$$\frac{\text{P(fehlerhaft in Werk A)}}{\text{P(fehlerhaft)}} = \frac{0,1 \cdot 0,05}{0,03} = \frac{1}{6}$$

c) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 250 zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die darunter mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

Dadurch, dass es eine Produktion ist, in der sich der fehlerhafte Anteil nicht ändert und

es zwei Ergebnisse gibt, kann eine Binomialverteilung angenommen werden. Dabei ist die Zufallsgröße $X \ldots$ Anzahl der fehlerhaften Geräte und es gilt $B_{250;0,05}$.

Die größte Wahrscheinlichkeit aller 251 Ereignisse hat der Erwartungswert, für den gilt: $\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0,05 = 12,5$. Die Frage ist nun, was wahrscheinliche ist: 12 fehlerhafte Geräte oder 13 fehlerhafte Geräte??
$P(X = 12) \approx 0,1160$ und $P(X = 13) \approx 0,1117 \quad \Rightarrow \quad$ 12 fehlerhafte Geräte zu haben unter 250 Geräten ist am wahrscheinlichsten mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 11,60 %.

d) Geben Sie einen Wert von s an, für den mit dem Term $200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02 + 0,98^{200}$ im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.

Hier geht es um Binomialverteilung dort gilt stets:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

für jedes einzelne Ereignis.

$200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02$ spricht dafür, dass $p = 0,02$ ist und $(1-p) = 0,98$. Also handelt es sich um Werk D, in welchem 2% fehlerhafte Geräte sind. Da $0,02 = 0,02^1$ ist und das $n = 200$ sein muss, da $\binom{200}{1} = 200$ gilt, muss $s = 200 - 1 = 199$ sein.

Bei $200 \cdot 0,98^{199} \cdot 0,02 + 0,98^{200}$ handelt es sich um $P(X = 1) + P(X = 0) = P(X \leqq 1)$ also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens ein Gerät von 200 Geräten in Werk D fehlerhaft ist.

e) Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 500 Geräte befinden, die nicht fehlerhaft sind.

Die Bedingung ist also $P(X \geqq 500) \geqq 0,9$ es geht aber um die nicht fehlerhaften in Werk C, also ist $p = 0,96$. Nun erfolgt, wie bereits geübt ein systematisches Probieren.

$B_{530;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,9756$ (zu groß)
$B_{520;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,4870$ (zu klein)
$B_{525;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,8423$ (zu klein)
$B_{526;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,8853$ (zu klein)
$B_{527;0,96} : P(X \geqq 500) \approx 0,9189$ (das erste Mal größer)

$\Rightarrow$ Es müssen mindestens 527 Geräte ausgewählt werden.

Aufgabe 7 (4+2+2+3+4+2+3 BE) – IQB-Aufgabe 2019

In einer Urne befinden sich Kugeln. 35 % der Kugeln sind mit „+1“ beschriftet, 25 % mit „+2“, die übrigen mit „-3“.

1. a) 100-mal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

   $X \ldots$ Anzahl der Kugeln mit „+1“. $B_{100;0,35}$ (Ziehen mit Zurücklegen; zwei Ereignisse)

   A: „Mehr als 30 und weniger als 45 der entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“

   $P(A) = P(30 < X < 45) \approx 0,8024$

   B: „Die ersten drei entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“

   $P(B) = 0,35 \cdot 0,35 \cdot 0,35 \approx 0,0429$

   b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der in der Urne insgesamt enthaltenen Kugeln kleiner als 100 sein kann.

   $35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ und $25\% = \frac{1}{4}$ und die restlichen $40\% = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

   Alle Brüche können auf den gemeinsamen Hauptnenner 20 gebracht werden ($\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ und $\frac{2}{5} = \frac{6}{20}$). Also können es sogar nur 20 Kugeln sein.

2. Unter Verwendung der Urne wird ein Spiel durchgeführt. Dabei wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zahlen auf den entnommenen Kugeln werden addiert. Ist das Ergebnis positiv, gewinnt der Spieler den Wert der Summe als Betrag in Euro, ist das Ergebnis negativ, verliert er den entsprechenden Betrag.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel mehr als 3 Euro gewinnt.

   Für mehr als 3 Euro ist nur $\{+2;+2\}$ möglich. Also $P(+2;+2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0,0625$

   b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel einen Gewinn erzielt 36 % beträgt.

   $P(+1;+2) + P(+2;+1) + P(+1;+1) + P(+2;+2) = \frac{7}{20} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20} + \frac{7}{20} \cdot \frac{7}{20} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

   $= 0,36$

   c) Ermitteln Sie für einen Spieler mithilfe eines Baumdiagramms den durchschnittlichen Verlust pro Spiel.

   Aus einem Baumdiagramm ergibt sich für die Zufallsgröße $Y \ldots$ Gewinn folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	-6€	-2€	-1€	2€	3€	4€
$P(Y = k)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{14}{50}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{49}{400}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{16}$

   $E(Y) = -6€ \cdot \frac{4}{25} - 2€ \cdot \frac{14}{50} - 1€ \cdot \frac{2}{10} + 2€ \cdot \frac{49}{400} + 3\ € \cdot \frac{7}{40} + 4€ \cdot \frac{1}{16} = -0,70€$

   Pro Spiel ist mit 70 Cent Verlust zu rechnen.

3. Die Anzahl der in der Urne tatsächlich enthaltenen Kugeln ist n. In die Urne werden zwei zusätzliche Kugeln gelegt, eine davon ist mit „+1“ beschriftet, die andere mit „+2“. Anschließend wird eine Kugel zufällig entnommen.

   a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, durch den Term $\frac{0,35n+1}{n+2}$ angegeben wird.

   Insgesamt werden 2 Kugeln dazu genommen, daher sind es also insgesamt $n+2$ Kugeln in der Urne.
   Zu den 35% Kugeln (von n) mit „+1“ kommt nun eine dazu. Also kommt zu $0,35 \cdot n$ noch eine dazu, was mathematisch $0,35 \cdot n + 1$ bedeutet.

   Daher gilt der Term $\frac{\text{Anzahl der Kugeln mit „+1“ drauf}}{\text{Anzahl aller Kugeln}} = \frac{0,35 \cdot n + 1}{n+2}$

   b) Durch das Hinzufügen nimmt sowohl die Wahrscheinlichkeit dafür zu, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, als auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+2“ beschriftet ist. Entscheiden Sie, für welche der beiden Wahrscheinlichkeiten die Zunahme größer ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

   Verglichen wird also der Unterschied zwischen $\frac{0,35n+1}{n+2}$ und $0,35$, was durch $\frac{0.35n+1}{n+2} - 0,35$ ausgedrückt werden kann und der Unterschied zwischen $\frac{0,25+1}{n+2}$ und $0,25$, was durch $\frac{0,25n+1}{n+2} - 0,25$ ausgedrückt werden kann.

$\frac{0,35n+1}{n+2} - 0,35$	???	$\frac{0,25n+1}{n+2} - 0,25$	$+0,35$
$\frac{0,35n+1}{n+2}$	???	$\frac{0,25n+1}{n+2} + 0,1$	$\cdot(n+2)$
$0,35n + 1$	???	$0,25n + 0,1n + 0,2$	zusammenfassen
$0,35n + 1$	$>$	$0,35n + 0,2$	

   Aus der Umformung ist erkenntlich, dass die linke Seite größer ist als die rechte Seite. Als Rückschluss kann somit auch gesagt werden, dass

$$\frac{0,35n+1}{n+2} - 0,35 > \frac{0,25n+1}{n+2} - 0,25$$

   gilt. Somit ist der Unterschied bei den 25% geringer als bei den 35%.

Aufgaben zur Übung II (23.09.2020)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (2+4+4+2+5+3 BE) – IQB-Aufgabe 2019

In einem Land, in dem 80 % der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 200 Erwachsene zufällig ausgewählt. Es soll angenommen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, binomialverteilt ist.

a) Begründen Sie, dass die beschriebene Annahme gerechtfertigt ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, vom Erwartungswert für diese Anzahl um höchstens 5 % abweicht.

c) Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein müsste, damit von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 160 einen Führerschein besitzen.

In einer bestimmten Region des betrachteten Lands werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 2.482 zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. Insgesamt haben 11.104 Prüflinge die Prüfung bestanden; davon waren 8.870 zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre.
Ein Prüfling wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt.“
B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden.“

d) Bestimmen Sie die Anzahl der Prüflinge, die zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre waren und die Prüfung nicht bestanden haben.

e) Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P(B)$ übereinstimmen.
Geben Sie an, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

f) Besteht ein Prüfling die Prüfung bei der ersten Teilnahme nicht, nimmt er ein zweites Mal teil. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung schon bei der ersten Teilnahme bestanden haben, ist q. Unter denjenigen, die zum zweiten Mal an der Prüfung teilnahmen, ist der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung bestanden haben, nur halb so groß. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung spätestens bei der zweiten Teilnahme bestanden haben, beträgt 90 %. Berechnen Sie den Wert von q.

Aufgabe 2 (2+2+2+2+4+4+4 BE) – IQB grundlegende Aufgabe

Ein Pharmakonzern entwickelt ein Medikament zur Behandlung der Krankheit K. Für die Zusammensetzung des Medikaments kommen zwölf Wirkstoffe infrage. Mit einer Vielzahl möglicher Wirkstoffkombinationen werden Tests durchgeführt.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Wirkstoffkombinationen, die genau sieben der infrage kommenden Wirkstoffe enthalten.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Wirkstoffkombinationen, die mindestens sieben der infrage kommenden Wirkstoffe enthalten.

Nach Abschluss der Entwicklung bringt der Pharmakonzern das neue Medikament auf den Markt. Einer Studie zufolge beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte an K erkrankte Person durch das Medikament geheilt wird, 80 %.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 zufällig ausgewählten an K erkrankten Personen mindestens 80 durch das Medikament geheilt werden.

d) Die Behandlung mit dem Medikament kann zu Nebenwirkungen führen. Im Rahmen einer Untersuchung zur Dauer der Nebenwirkungen wurden Personen, die mit dem Medikament behandelt wurden, dazu befragt, wie lange Nebenwirkungen nach Beendigung der Behandlung andauerten. Die folgende Tabelle fasst das Ergebnis der Befragung zusammen:

Dauer in Monaten	0	1	2	3	4
Anteil der Personen in %	5	15	45	30	5

Eine der befragten Personen wird zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X gibt die zugehörige Dauer der Nebenwirkungen in Monaten an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X und beschreiben Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass in einem Land 0,2 % der Bevölkerung an K erkrankt sind.

e) Ermitteln Sie für dieses Land, wie groß die Anzahl zufällig ausgewählter Personen mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass davon mindestens eine Person an K erkrankt ist, mindestens 90 % beträgt.

Zur Erkennung der Krankheit K kann ein Test durchgeführt werden. Ist eine Person an K erkrankt, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Ist eine Person nicht an K erkrankt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis irrtümlich positiv ist, 1 %.

f) Erstellen Sie zum beschriebenen Test für das betrachtete Land eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

g) Für eine zufällig ausgewählte Person aus dem betrachteten Land ist das Testergebnis positiv. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich erkrankt ist, etwa 16,4 % beträgt. Begründen Sie, dass es bei einem positiven Testergebnis sinnvoll ist, nicht sofort mit einer Behandlung zu beginnen.

Aufgaben zur Übung II (23.09.2020)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (2+4+4+2+5+3 BE) – IQB-Aufgabe 2019

In einem Land, in dem 80 % der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 200 Erwachsene zufällig ausgewählt. Es soll angenommen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, binomialverteilt ist.

a) Begründen Sie, dass die beschriebene Annahme gerechtfertigt ist.

Es handelt sich um zwei Ereignisse: Die Person hat einen Führerschein oder nicht. Da es ein gesellschaftlicher Anteil ist, verändert sich die Wahrscheinlichkeit nicht.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, vom Erwartungswert für diese Anzahl um höchstens 5 % abweicht.

Der Erwartungswert ist $\mu = 0,8 \cdot 200 = 160$. 5% von 160 Personen sind 8 Personen.

$P(160 - 8 \leqq X \leqq 160 + 8) = P(152 \leqq X \leqq 168) \approx 86,77\%$

c) Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein müsste, damit von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 160 einen Führerschein besitzen.

$P(X > 160) \geqq 0,9$ Lösung durch systematisches Probieren

Für $B_{209;0,8}$ ist $P(X > 160) \approx 0,876$ und für $B_{210;0,8}$ ist $P(X > 160) \approx 0,9003$, also müssen es mindestens 210 Personen sein.

In einer bestimmten Region des betrachteten Lands werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 2.482 zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. Insgesamt haben 11.104 Prüflinge die Prüfung bestanden; davon waren 8.870 zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre.
Ein Prüfling wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt.“
B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden.“

d) Bestimmen Sie die Anzahl der Prüflinge, die zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre waren und die Prüfung nicht bestanden haben.

	A	$\overline{A}$	gesamt
B	2.234	8.870	11.104
$\overline{B}$	248	2.527	2.775
gesamt	2.482	11.397	13.879

Aus der Vierfeldertafel ist ersichtlich, dass es 2.527 Personen sind.

e) Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P(B)$ übereinstimmen.
Geben Sie an, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Wenn $P_A(B) = P(B)$ gilt, dann sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig.

$P(B) = \frac{11.104}{13.879} \approx 0,80$ $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2.234}{2.482} \approx 0,90$

Also ist $P(B) \neq P_A(B)$ und daher sind die Ereignisse stochastisch abhängig. Das heißt, das Bestehen der Prüfung ist abhängig vom Alter der Personen.

f) Besteht ein Prüfling die Prüfung bei der ersten Teilnahme nicht, nimmt er ein zweites Mal teil. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung schon bei der ersten Teilnahme bestanden haben, ist q. Unter denjenigen, die zum zweiten Mal an der Prüfung teilnahmen, ist der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung bestanden haben, nur halb so groß. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung spätestens bei der zweiten Teilnahme bestanden haben, beträgt 90 %. Berechnen Sie den Wert von q.

$q + (1 - q) \cdot \frac{1}{2} \cdot q = 0,9$ ist die Gleichung, die hier beschrieben wird, da zu dem Anteil q das Gegenereignis $(1 - q)$ (weil die Person beim ersten Mal nicht bestanden hat) mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2} \cdot q$ multipliziert wird. Wird diese Gleichung im Rechner gelöst, so erhält man: $q_1 \approx 0,8292$ und $q_2 \approx 2,1708$. Dabei entfällt q_2, da dies keine Wahrscheinlichkeit sein kann (muss zwischen 0 und 1 liegen). Also ist $q \approx 82,92\%$.

Aufgabe 2 (2+2+2+2+4+4+4 BE) – IQB grundlegende Aufgabe

Ein Pharmakonzern entwickelt ein Medikament zur Behandlung der Krankheit K. Für die Zusammensetzung des Medikaments kommen zwölf Wirkstoffe infrage. Mit einer Vielzahl möglicher Wirkstoffkombinationen werden Tests durchgeführt.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Wirkstoffkombinationen, die genau sieben der infrage kommenden Wirkstoffe enthalten.

Dies wird mithilfe des Binomialkoeffizienten berechnet mit $n = 12$ und $k = 7$, also $\binom{12}{7} = 792$ Möglichkeiten

b) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Wirkstoffkombinationen, die mindestens sieben der infrage kommenden Wirkstoffe enthalten.

$$\binom{12}{7} + \binom{12}{8} + \binom{12}{9} + \binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12} = \sum_{k=7}^{12} \binom{12}{k} = 1.586 \text{ Möglichkeiten}$$

Nach Abschluss der Entwicklung bringt der Pharmakonzern das neue Medikament auf den Markt. Einer Studie zufolge beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte an K erkrankte Person durch das Medikament geheilt wird, 80 %.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 zufällig ausgewählten an K erkrankten Personen mindestens 80 durch das Medikament geheilt werden.

$B_{100;0,8}$ (Begründung nicht erfordert) X...Anzahl der geheilten Personen

$P(X \geqq 80) \approx 55,95\%$

d) Die Behandlung mit dem Medikament kann zu Nebenwirkungen führen. Im Rahmen einer Untersuchung zur Dauer der Nebenwirkungen wurden Personen, die mit dem Medikament behandelt wurden, dazu befragt, wie lange Nebenwirkungen nach Beendigung der Behandlung andauerten. Die folgende Tabelle fasst das Ergebnis der Befragung zusammen:

Dauer in Monaten	0	1	2	3	4
Anteil der Personen in %	5	15	45	30	5

Eine der befragten Personen wird zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X gibt die zugehörige Dauer der Nebenwirkungen in Monaten an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X und beschreiben Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

$E(X) = 0 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,30 + 4 \cdot 0,05 = 2,15$

Das heißt, dass die erwarteten Nebenwirkungen ein wenig über 2 Monate andauern können.

Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass in einem Land 0,2 % der Bevölkerung an K erkrankt sind.

e) Ermitteln Sie für dieses Land, wie groß die Anzahl zufällig ausgewählter Personen mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass davon mindestens eine Person an K erkrankt ist, mindestens 90 % beträgt.

Y...Anzahl der Personen, die an K erkrankt ist $P(Y \geqq 1) \geqq 0,9$ Lösung durch systematisches Probieren

Für $B_{1150;0,002}$ ist $P(Y \geqq 1) \approx 0,89997$ und für $B_{1151;0,002}$ ist $P(Y \geqq 1) \approx 0,9002$, also müssen mindestens 1.151 Personen ausgewählt werden.

Zur Erkennung der Krankheit K kann ein Test durchgeführt werden. Ist eine Person an K erkrankt, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Ist eine Person nicht an K erkrankt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis irrtümlich positiv ist, 1 %.

f) Erstellen Sie zum beschriebenen Test für das betrachtete Land eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

98% von 0,002 ist 0,00196 1% von 0,998 ist 0,00998

	K	$\overline{K}$	gesamt
T (positiv)	0,00196	0,00998	0,01194
$\overline{T}$ (negativ)	0,00004	0,98802	0,98806
gesamt	0,002	0,998	1

g) Für eine zufällig ausgewählte Person aus dem betrachteten Land ist das Testergebnis positiv. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich erkrankt ist, etwa 16,4 % beträgt. Begründen Sie, dass es bei einem positiven Testergebnis sinnvoll ist, nicht sofort mit einer Behandlung zu beginnen.

$P_K(T) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}00196}{0{,}01194} \approx 16,42\%$

Da die Person nur zu 16,42% wirklich krank sein könnte, ist es nicht sinnvoll, gleich anzunehmen, dass sie krank ist, nur weil der Test positiv ist. Vielleicht sollte noch ein Test gemacht werden.