Aufgaben zu Linearen Gleichungssystemen (26.11.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (18 BE)

Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender LGS und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anschließend mithilfe des CAS.

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 4x & - & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & y & - & 5z & = & 9 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -5 \end{array}$$

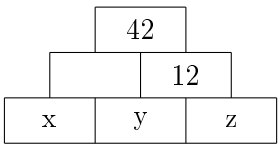
4. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & = & -6 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ -2x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & 5y & + & z & = & 2 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 2 (6 + 4 BE)

Früher hatten Sie im Unterricht Zahlenmauern oder Rechentafeln, um die Addition verschiedener Zahlen zu üben.



+	4	y	
3	7		10
x		6	
	9		

a) Stellen Sie für die Zahlenmauer und die Rechentafel das entsprechende Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

b) Eine Lehrkraft an der Grundschule möchte sich wenig Arbeit machen und möglichst viele Zahlenmauern bzw. Rechentafeln aus den beiden Vorlagen erstellen. Begründen Sie, wie viele Möglichkeiten es für die Zahlenmauer und wie viele es für die Rechentafel gibt.

Aufgabe 3 (4 + 6 BE)

Ein Kaffeegroßröster stellt Kaffeemischungen verschiedener Preisklassen her. Der Preis für 500 g von einer Bohnensorte A beträgt 6,00 €, für 500 g von einer Bohnensorte B 7,50€, für 500g von einer Sorte C 9,00 €und für 500 g von einer Sorte D 11,25 €.

a) Eine Mischung soll Bohnen der Sorte A, B, C enthalten und 6,75 €pro 500 g kosten. Begründen Sie, dass man aus diesen Angaben das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 6a & + & 7,5b & + & 9c & = & 6,75 \\ a & + & b & + & c & = & 1 \end{array}$$ aufstellen kann.

Ermitteln Sie eine mögliche Mischung. Wie groß darf der Anteil der Sorte C höchstens sein?

b) Eine Mischung soll Bohnen der Sorte A, B und D enthalten und 9 € pro 500 g kosten.

- Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und bestimmen Sie alle Lösungen.
- Untersuchen Sie, ob eine Mischung von 10 % von Sorte D möglich ist.
- Wie groß muss der Anteil der Sorte D sein, sodass eine Mischung 9 € kostet?

Aufgaben zu Linearen Gleichungssystemen (26.11.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (18 BE)

Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender LGS und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anschließend mithilfe dem CAS.

1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 4x & - & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & y & - & 5z & = & 9 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right) \underset{III+3I}{\overset{II+2I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right) \underset{3\cdot III}{\overset{4\cdot II}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 8 & 4 \\ 0 & 12 & 3 & 18 \end{array}\right)$$

$$\overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right) \rightarrow z = 2 \quad \rightarrow y = 1 \quad \rightarrow x = -3 \quad \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 10 \\ -1 & -4 & 2 & -4 \end{array}\right) \underset{III+I}{\overset{II-2I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad 0 = 1 \text{ Widerspruch}$$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\}$ eine andere Schreibweise wäre $\mathcal{L} = \emptyset$

3.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 10 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & -5 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 10 \\ -1 & -4 & 2 & -5 \end{array}\right) \underset{III+I}{\overset{II-2I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ & & 5y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

Wir haben nun also 2 Gleichungen und 3 Unbekannte, also muss eine Unbekannte als beliebige Variable gesetzt werden. Nehmen wir dafür beispielsweise z.

Setze $z = t \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad 5y = 3t \Rightarrow y = \frac{3}{5}t$

$x - \frac{3}{5}t + t = 5 \Leftrightarrow x = 5 - \frac{2}{5}t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{2}{5}t \\ & \frac{3}{5}t \\ & t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

4. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & = & -6 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \overset{II-I}{\underset{III+I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow z = 3 \quad \rightarrow y = 2 \quad \rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

5. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ -2x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & 5y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{II+2I}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \quad 0 = 8 \text{ Widerspruch}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\}$$

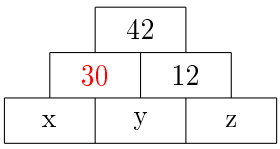
6. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{II-I}{\underset{III-I}{\rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow -2z = -6 \Leftrightarrow z = 3 \quad \rightarrow y - 2 \cdot 3 = -2 \Leftrightarrow y = 4 \quad \rightarrow x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2 (6 + 4 BE)

Früher hatten Sie im Unterricht Zahlenmauern oder Rechentafeln, um die Addition verschiedener Zahlen zu üben.



+	4	y	7
3	7		10
x		6	
5	9		12

a) Stellen Sie für die Zahlenmauer und die Rechentafel das entsprechende Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

Für die Zahlenmauer gelten die Gleichungen

$$x + y = 30 \qquad \text{und} \qquad y + z = 12$$

Wie in Aufgabe 1.3 haben wir 2 Gleichungen und 3 Unbekannte, also muss wieder eine Unbekannte als eine beliebige Variable gesetzt werden. Wählen wir dieses Mal y, weil es in beiden Gleichungen vorkommt.

Setze $y = t \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad x = 30 - t$ und $z = 12 - t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -t \\ & t \\ 12 & -t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

In der Rechentafel gilt lediglich eine Gleichung:

$$x + y = 6$$

Dies ist also 1 Gleichung mit 2 Unbekannten. Setzen wir also $y = t \in \mathbb{R}$, dann ist $x = 6 - t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -t \\ & t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Eine Lehrkraft an der Grundschule möchte sich wenig Arbeit machen und möglichst viele Zahlenmauern bzw. Rechentafeln aus den beiden Vorlagen erstellen. Begründen Sie, wie viele Möglichkeiten es für die Zahlenmauer und wie viele es für die Rechentafel gibt.

Bei der Zahlentafel dürfen keine negativen Zahlen stehen, keine Brüche und erst recht keine irrationalen Zahlen. Es darf also maximal 0 als nicht natürliche Zahl da stehen und ansonsten können Zahlenmauern und Rechentafeln in der Grundschule aus natürlichen Zahlen bestehen.

Aus der Zahlenmauer können 13 verschiedene Mauern aufgrund der Lösungsmenge gemacht werden. Analog gibt es bei der Rechentafel 7 verschiedene Rechentafeln.

Aufgabe 3 (4 + 6 BE)

Ein Kaffeegroßröster stellt Kaffeemischungen verschiedener Preisklassen her. Der Preis für 500 g von einer Bohnensorte A beträgt 6,00 €, für 500 g von einer Bohnensorte B 7,50€, für 500g von einer Sorte C 9,00 €und für 500 g von einer Sorte D 11,25 €.

a) Eine Mischung soll Bohnen der Sorte A, B, C enthalten und 6,75 €pro 500 g kosten. Begründen Sie, dass man aus diesen Angaben das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 6a & + & 7,5b & + & 9c & = & 6,75 \\ a & + & b & + & c & = & 1 \end{array}$$ aufstellen kann.

Ermitteln Sie eine mögliche Mischung. Wie groß darf der Anteil der Sorte C höchstens sein?

a: Anteil der Bohnensorte A an der Gesamtmenge in Prozent. Analog für b, c und d.
Für den Gesamtpreis der Mischung gilt: $6a + 7,5b + 9c = 6,75$
Die Anteile müssen zusammen 100% ergeben, also $a + b + c = 1$

Das zugehörige Gleichungssystem hat die Lösungsmenge: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

(nachrechnen)
Aus der zweiten Zeile folgt, dass $0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}$ sein muss, da ansonsten negative Mischungen für die Kaffeesorte B herauskommen. Da dies der Mischung von Kaffeesorte C entspricht, darf somit maximal 25% von Kaffeesorte C eingemischt werden.

b) Eine Mischung soll Bohnen der Sorte A, B und D enthalten und 9 € pro 500 g kosten.

- Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und bestimmen Sie alle Lösungen.

  Das LGS lautet: $\begin{array}{rcrcrcl} 6a & + & 7,5b & + & 11,25d & = & 9 \\ a & + & b & + & d & = & 1 \end{array}$

  Die Lösung dieses LGS lautet: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ -3,5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

  (nachrechnen)

- Untersuchen Sie, ob eine Mischung von 10 % von Sorte D möglich ist.

  Wir setzen in unsere Lösung $t = 0,1$ ein: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ -3,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75 \\ 1,65 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

  Das das Mischverhältnis der Kaffeesorte A negativ ist und bei Kaffeesorte B 165% eingemischt werden sollen, ist es nicht möglich.

- Wie groß muss der Anteil der Sorte D sein, sodass eine Mischung 9 € kostet?

  Damit die Mischung von Kaffeesorte A zwischen 0 und 1 liegt, $\frac{2}{5} \leqq t \leqq \frac{4}{5}$ gelten.

  Damit die Mischung von Kaffeesorte B zwischen 0 und 1 liegt, $\frac{2}{7} \leqq t \leqq \frac{4}{7}$ gelten.

  Da beide Bedingungen erfüllt sein müssen, ist $\frac{2}{5} \leqq t \leqq \frac{4}{7}$ als Mischungsverhältnis für die Kaffeesorte D möglich.

Punkte und Objekte im $\mathbb{R}^3$ (19.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 + 1 + 6 BE)

Gegeben sei das Dreieck ABC mit seinen Eckpunkten $A(6|-5|4)$, $B(5|1|4)$ und $C(-3|13|6)$.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt S des Dreiecks.

c) Ermitteln Sie die vektorielle Beschreibung der Seitenhalbierenden $S_{\overline{AB}}$, $S_{\overline{BC}}$ und $S_{\overline{AC}}$.

Aufgabe 2 (1 + 1 + 1 + 1 + 5 BE)

Berechnen Sie die Mittelpunkte der gegebenen Objekte.

a) Strecke $\overline{AB}$ mit

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$

b) Dreieck RST mit $R(1|2|3), S(2|3|5)$ und $T(2|4|8)$

c) Viereck $EFGH$ mit $E(-1|1|-1), F(-2|4|-8), G(-3|9|-27)$ und $H(0|1|0)$

d) Fünfeck $OPQRS$ mit

O (Koordinatenursprung), $P(5|5|5), Q(3|6|7), R(0|3|8)$ und $S(-2|-3|4)$

e) Quader $ABCDEFGH$ mit Grundfläche $ABCD$ und Deckfläche $DEFG$

A ist im Koordinatenursprung, $B(4|0|0)$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E(0|0|8)$

Aufgabe 3 (4 BE)

Stellen Sie den Quader $ABCDEFGH$ aus Aufgabe 2e) in einem geeigneten kartesischen Koordinatensystem dar.

Aufgabe 4 (3 + 2 + 1 BE)

Stellen Sie einen Würfel mit Kantenlänge 4 LE in einem kartesischen Koordinatensystem räumlich dar. Bestimmen Sie außerdem die Mittelpunkte der Seitenflächen und den Schwerpunkt des Würfels.

Aufgabe 5 (2 BE)

Seien die Punkte $A(x_A|y_A|z_A)$ und $B(x_B|y_B|z_B)$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Punkte und Objekte im $\mathbb{R}^3$ (19.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 + 1 + 6 BE)

Gegeben sei das Dreieck ABC mit seinen Eckpunkten $A(6|-5|4)$, $B(5|1|4)$ und $C(-3|13|6)$.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ 1-(-5) \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-5 \\ 13-1 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt S des Dreiecks.

$$S\left(\frac{6+5-3}{3}\middle|\frac{-5+1+13}{3}\middle|\frac{4+4+6}{3}\right) \qquad \rightarrow \qquad S\left(\frac{8}{3}\middle|3\middle|\frac{14}{3}\right)$$

c) Ermitteln Sie die vektorielle Beschreibung der Seitenhalbierenden $S_{\overline{AB}}$, $S_{\overline{BC}}$ und $S_{\overline{AC}}$.

Die Seitenhalbierenden sind die Verbindungen der Mittelpunkte der Seiten und den gegenüberliegenden Eckpunkten.

$$M_{\overline{AB}}(5,5|-2|4) \qquad \rightarrow \qquad S_{\overline{AB}} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_{\overline{AB}}} = \begin{pmatrix} -3-5,5 \\ 13-(-2) \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{BC}}(1|7|5) \qquad \rightarrow \qquad S_{\overline{BC}} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_{\overline{BC}}} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ -5-7 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{AC}}(1,5|4|5) \qquad \rightarrow \qquad S_{\overline{AC}} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_{\overline{AC}}} = \begin{pmatrix} -5-1,5 \\ 1-4 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (1 + 1 + 1 + 1 + 5 BE)

Berechnen Sie die Mittelpunkte der gegebenen Objekte.

a) Strecke $\overline{AB}$ mit

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$M\left(\frac{2+0}{2}\middle|\frac{3+8}{2}\middle|\frac{4+15}{2}\right) \qquad \rightarrow \qquad M(1|5,5|9,5)$$

b) Dreieck RST mit $R(1|2|3), S(2|3|5)$ und $T(2|4|8)$

$$M\left(\frac{1+2+2}{3}\middle|\frac{2+3+4}{3}\middle|\frac{3+5+8}{3}\right) \qquad \rightarrow \qquad M\left(\tfrac{5}{3}\mid 3 \mid \tfrac{16}{3}\right)$$

c) Viereck $EFGH$ mit $E(-1|1|-1), F(-2|4|-8), G(-3|9|-27)$ und $H(0|1|0)$

$$M\left(\frac{-1-2-3+0}{4}\middle|\frac{1+4+9+1}{4}\middle|\frac{-1-8-27+0}{4}\right) \rightarrow M(-1,5|3,75|-9)$$

d) Fünfeck $OPQRS$ mit

O (Koordinatenursprung), $P(5|5|5), Q(3|6|7), R(0|3|8)$ und $S(-2|-3|4)$

$M\left(\frac{0+5+3+0-2}{5}\middle|\frac{0+5+6+3-3}{5}\middle|\frac{0+5+7+8+4}{5}\right) \rightarrow M(1,2|2,2|4,8)$

e) Quader $ABCDEFGH$ mit Grundfläche $ABCD$ und Deckfläche $DEFG$

A ist im Koordinatenursprung, $B(4|0|0)$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E(0|0|8)$

Zuerst müssen noch die fehlenden Koordinaten ermittelt werden.
Der Punkt D muss auch $x_3 = 0$ haben, da A, B und C in einer Ebene liegen (gleiche x_3-Koordinate).
Damit die Grundfläche ein Rechteck ist, muss D die Koordinaten $D(0|7|0)$ haben.

Der Punkt E liegt 8 LE über A, so liegen also auch alle anderen Punkte jeweils 8 LE über den entsprechenden Punkten
$\rightarrow F(4|0|8), G(4|7|8)$ und $H(0|7|8)$

Nun wird der Mittelpunkt aus den 8 Punkten gebildet.

$M\left(\frac{16}{8}\middle|\frac{28}{8}\middle|\frac{32}{8}\right) \qquad \rightarrow \qquad M(2|3,5|4)$

Aufgabe 3 (4 BE)

Stellen Sie den Quader $ABCDEFGH$ aus Aufgabe 2e) in einem geeigneten kartesischen Koordinatensystem dar.

Die zu verbindenden Punkte sind:

$A(0|0|0), B(4|0|0), C(4|7|0), D(0|7|0), E(0|0|8), F(4|0|8), G(4|7|8), H(0|7|8)$

Aufgabe 4 (3 + 2 + 1 BE)

Stellen Sie einen Würfel mit Kantenlänge 4 LE in einem kartesischen Koordinatensystem räumlich dar. Bestimmen Sie außerdem die Mittelpunkte der Seitenflächen und den Schwerpunkt des Würfels.

Darzustellen sind z.B. die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|4|0)$, $D(0|4|0)$, $E(0|0|4)$, $F(4|0|4)$, $G(4|4|4)$ und $H(0|4|4)$. (3 BE)

$M_{ABFE}(2|0|2)$, $M_{ABCD}(2|2|0)$, $M_{BCGF}(4|2|2)$, $M_{CDHG}(2|4|2)$, $M_{ADFE}(0|2|2)$, $M_{EFGH}(2|2|4)$ (2 BE)

$S(2|2|2)$ (1 BE)

Aufgabe 5 (2 BE)

Seien die Punkte $A(x_A|y_A|z_A)$ und $B(x_B|y_B|z_B)$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix}$

Außerdem ist $-\overrightarrow{BA} = -\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_A - x_B) \\ -(y_A - y_B) \\ -(z_A - z_B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_A + x_B \\ -y_A + y_B \\ -z_A + z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$

Also gilt: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (24.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ c) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

d) $3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c}$ e) $2 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} - \frac{5}{2} \cdot \vec{c}$ f) $-\frac{5}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{4}{3} \cdot \vec{c}$

Aufgabe 2 (2 + 3 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide $ABCDS$ gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.

a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

b) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben ist der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ole und Emma berechnen die Länge des Vektors.

Ole: $|\vec{x}| = \sqrt{2 - 2 + 5} = \sqrt{5}$ LE Emma: $|\vec{x}| = \sqrt{2^2 - 2^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$ LE.

Begründen Sie, welche Fehler gemacht wurden und geben Sie den korrekten Rechenweg an.

Aufgabe 4 (2 BE)

Bestimmen Sie den Einheitsvektor $\vec{a_0}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob das $\triangle ABC$ mit $A(0|3|0)$, $B(2|4|6)$ und $C(-1|-2|-3)$ gleichschenklig ist.

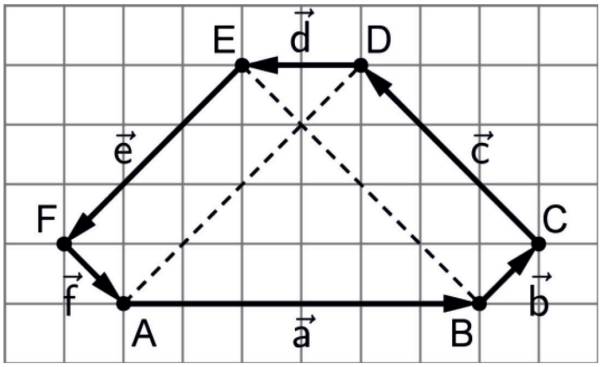
Aufgabe 6 (4 BE)

Vereinfachen Sie die Vektorsummen soweit wie möglich. Fertigen Sie dazu jeweils eine Skizze an.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR}$ d) $\overrightarrow{RP} - (\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QS}$

Aufgabe 7 (2 + 1 + 2 BE)

Im abgebildeten Sechseck $ABCDEF$ sind jeweils zwei Seiten parallel zueinander.



a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar.

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \qquad\qquad \vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$$

b) Stellen Sie nun den Vektor $\overrightarrow{FB}$ mithilfe von genau drei der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.

c) Der Punkt A hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ wird mit M bezeichnet. Der Punkt $K(2|0|8)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$. Ermitteln Sie die Koordinaten von B.

Aufgabe 8 (3+3+3+3 BE)

Bei einer Verschiebung wird der Punkt A auf den Punkt B abgebildet.
Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass $|\overrightarrow{AB}| = d$ gilt.

a) $A(5|2|5); B(6|4|b_3); d = 3$

b) $A(-6|a_2|-4); B(-2|3|-4); d = 5$

c) $A(6|3|-5); B(b_1|2|-2); d = 4$

d) $A(-10|21|0); B(4|b_2|5); d = 15$

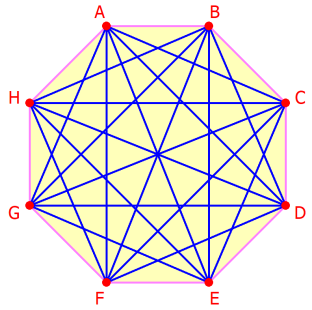
Aufgabe 9 (3+3 BE)

a) Der Punkt $P(1|-3|8)$ wird an der x_1x_2-Ebene gespiegelt.
Bestimmen Sie die Koordinaten seines Bildpunktes P' und berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{PP'}$.

b) Der Punkt $A(-4|5|9)$ wird in die x_1x_2-Ebene projiziert.
Bestimmen Sie die Koordinaten seines Bildpunktes A' und berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{AA'}$.

Aufgabe 10 (4+4+3 BE)

Hier sehen Sie ein Achteck $ABCDEFGH$ mit allen Verbindungen zwischen den Eckpunkten.



a) Geben Sie alle identischen Vektoren an. Z.B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ und $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EF}$.

b) Geben Sie in einer Liste an, welche gleich langen Vektoren es gibt.

c) Beschreiben Sie zueinander vielfache, jedoch nicht identische Vektoren.

Aufgabe 11 (3+3 BE)

Der Startpunkt S eines Heißluftballons kann in einem Koordinatensystem (mit der Einheit Meter) durch die Koordinaten $S(225|-349|114)$ beschrieben werden. Er steigt in den ersten fünf Minuten bei nahezu konstanten Windverhältnissen um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T, in dem sich der Ballon nach 5 min und des Punktes R, in dem sich der Ballon nach 2 min befindet.

b) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Ballons in dieser Zeit.

Aufgabe 12 (3+4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-3|-2|5), B(2|-3|3)$ und $C_k(k|-3|5)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie für $k = -10$ den Umfang des Dreiecks ABC_{-10}.

b) Untersuchen Sie, ob es Werte von k gibt, für welche das Dreieck ABC_k gleichschenklig ist. Ist auch der Spezialfall gleichseitig möglich?

Aufgabe 13 (4+6 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|6|5), B(-1|6|5)$ und $C(-1|3|9)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ist. Bestimmen Sie einen Punkt D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

b) Das Quadrat $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(-2|2|5)$. Untersuchen Sie, ob die Seitenkanten der Pyramide alle gleich lang sind.
Stellen Sie die Pyramide im Schrägbild in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (24.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+6 \\ 1-3+8 \\ 3+5-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0+6 \\ 1+3+8 \\ 3-5-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$

c) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -2+0-6 \\ -1-3-8 \\ -3+5+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}$

d) $3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 35 \end{pmatrix}$

e) $2 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} - \frac{5}{2} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -30 \\ 66 \end{pmatrix}$

f) $-\frac{5}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{4}{3} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{15}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{3} \\ \frac{32}{3} \\ -\frac{64}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ 8 \\ -\frac{74}{3} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (2 + 3 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide $ABCDS$ gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.

a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

$A(0|0|0), B(5|0|0), C(5|5|0), D(0|5|0), \qquad S(2,5|2,5|7)$

Den Punkt S bekommt man durch den Mittelpunkt von $ABCD$ ermittelt.

b) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Es gilt $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

Variante 1: Die Höhe wird 4 Mal so hoch gewählt: $S(2,5|2,5|28)$, dann ist das Volumen auch 4 Mal so groß.

Variante 2: Beispielsweise $A(0|0|0)$, $B(20|0|0)$, $C(20|5|0)$ und $D(0|5|0)$, dann wären die parallelen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ viermal so lang, aber $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ wären weiterhin 5 LE lang.

Variante 3: Alle Seitenlängen werden verdoppelt: $A(0|0|0)$, $B(10|0|0)$, $C(10|10|0)$ und $D(0|10|0)$, dann würde sich A_G auch vervierfachen.

Wichtig ist bei Variante 2 und Variante 3, dass S weiterhin die x_3-Koordinate 7 beibehält, damit sich die Höhe der Pyramide nicht ändert.

Es sind auf jeden Fall noch mehr Varianten möglich.

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben ist der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ole und Emma berechnen die Länge des Vektors.

Ole: $|\vec{x}| = \sqrt{2-2+5} = \sqrt{5}$ LE Emma: $|\vec{x}| = \sqrt{2^2-2^2+5^2} = \sqrt{25} = 5$ LE.

Begründen Sie, welche Fehler gemacht wurden und geben Sie den korrekten Rechenweg an.

Ole hat die einzelnen Komponenten nicht quadriert. Emma hat die -2 nicht eingeklammert.

$|\vec{x}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+5^2} = \sqrt{33}$ LE

Aufgabe 4 (2 BE)

Bestimmen Sie den Einheitsvektor $\vec{a_0}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{6^2+8^2+0^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob das $\triangle ABC$ mit $A(0|3|0)$, $B(2|4|6)$ und $C(-1|-2|-3)$ gleichschenklig ist.

$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2+1^2+6^2} = \sqrt{41}$ LE

$|\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-3)^2} = \sqrt{35}$ LE

$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2+(-6)^2+(-9)^2} = \sqrt{126}$ LE

Keine zwei Seiten sind gleich lang, also ist das Dreieck ABC nicht gleichschenklig.

Aufgabe 6 (4 BE)

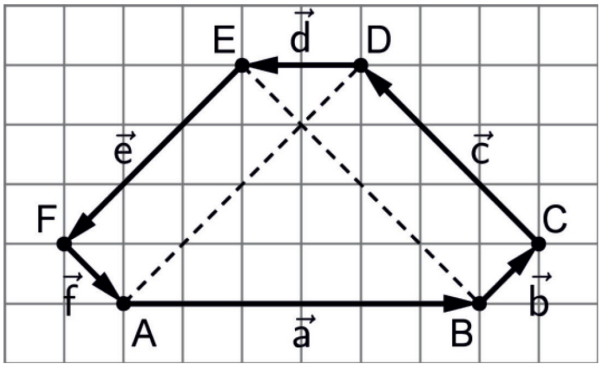
Vereinfachen Sie die Vektorsummen soweit wie möglich. Fertigen Sie dazu jeweils eine Skizze an.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{RP} - (\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$

Aufgabe 7 (2 + 1 + 2 BE)

Im abgebildeten Sechseck $ABCDEF$ sind jeweils zwei Seiten parallel zueinander.



a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar.

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{BE} \qquad \vec{y} = \vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{FE}$$

b) Stellen Sie nun den Vektor $\overrightarrow{FB}$ mithilfe von genau drei der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.

$\overrightarrow{FB} = \vec{f} - \vec{e} - \vec{c}$

c) Der Punkt A hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ wird mit M bezeichnet. Der Punkt $K(2|0|8)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$. Ermitteln Sie die Koordinaten von B.

Aus dem Text kann entnommen werden, dass $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 4 \cdot \overrightarrow{AK}$ gilt.
(Eine Skizze hilft hier.)

$$\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 44 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad B(-10|-6|44)$$

Aufgabe 8 (3+3+3+3 BE)

Bei einer Verschiebung wird der Punkt A auf den Punkt B abgebildet.
Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass $|\overrightarrow{AB}| = d$ gilt.

a) $A(5|2|5); B(6|4|b_3); d = 3$ $\quad b_3 = 7$ oder $b_3 = 3$

b) $A(-6|a_2|-4); B(-2|3|-4); d = 5$ $\quad a_2 = 0$ oder $a_2 = 6$

c) $A(6|3|-5); B(b_1|2|-2); d = 4$ $\quad b_1 = 6 + \sqrt{6}$ oder $b_1 = 6 - \sqrt{6}$

d) $A(-10|21|0); B(4|b_2|5); d = 15$ $\quad b_2 = 23$ oder $b_2 = 19$

Aufgabe 9 (3+3 BE)

a) Der Punkt $P(1|-3|8)$ wird an der x_1x_2-Ebene gespiegelt.
Bestimmen Sie die Koordinaten seines Bildpunktes P' und berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{PP'}$.

P wird auf den Bildpunkt $P'(1|-3|-8)$ abgebildet. Es gilt:

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} \text{ und } |\overrightarrow{PP'}| = 16 \text{ LE}$$

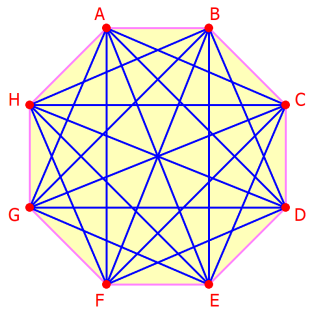
b) Der Punkt $A(-4|5|9)$ wird in die x_1x_2-Ebene projiziert.
Bestimmen Sie die Koordinaten seines Bildpunktes A' und berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{AA'}$.

A wird auf den Bildpunkt $A'(-4|5|0)$ abgebildet. Es gilt:

$$\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ und } |\overrightarrow{AA'}| = 9 \text{ LE}$$

Aufgabe 10 (4+4+3 BE)

Hier sehen Sie ein Achteck $ABCDEFGH$ mit allen Verbindungen zwischen den Eckpunkten.



a) Geben Sie alle identischen Vektoren an. Z.B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ und $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EF}$.

Gegenüberliegende Seitenbegrenzungen: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GF}; \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FG}; \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HG}; \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AH}; \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{HA}$

Querverbindungen (eine Ecke dazwischen): $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{FD}; \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{DF}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GE}; \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EG}; \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CE}; \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{EC}$

Querverbindungen (zwei Ecken dazwischen): $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}; \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EB}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HE}; \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EH}$ $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CF}; \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{FC}; \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DG}; \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{GD}$

b) Geben Sie in einer Liste an, welche gleich langen Vektoren es gibt.

Alle identischen Vektoren aus einer Kategorie aus Aufgabe a) sind natürlich auch gleich lang. Dazu kommt, dass die Verbindung von zwei gegenüberliegenden Punkten auch gleich lang ist:

$$|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{BF}| = |\overrightarrow{CG}| = |\overrightarrow{DH}| = |\overrightarrow{EA}| = |\overrightarrow{FB}| = |\overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{HD}|$$

c) Beschreiben Sie zueinander vielfache, jedoch nicht identische Vektoren.

Alle zueinander parallelen, aber nicht identischen Vektoren sind Vielfache voneinander, z.B. $\overrightarrow{GH}$ und $\overrightarrow{FA}$ bzw. $\overrightarrow{AF}$ (nur anderes Vorzeichen, trotzdem Vielfaches).

Aufgabe 11 (3+3 BE)

Der Startpunkt S eines Heißluftballons kann in einem Koordinatensystem (mit der Einheit Meter) durch die Koordinaten $S(225|-349|114)$ beschrieben werden. Er steigt in den ersten fünf Minuten bei nahezu konstanten Windverhältnissen um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T, in dem sich der Ballon nach 5 min und des Punktes R, in dem sich der Ballon nach 2 min befindet.

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 225 \\ -349 \\ 114 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 251 \\ 1.314 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad T(375|251|1.314)$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} + \tfrac{2}{5} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 225 \\ -349 \\ 114 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 285 \\ -109 \\ 594 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad R(285|-109|594)$$

b) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Ballons in dieser Zeit.

Weg von 5 Minuten: $|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 150 \\ 600 \\ 1.200 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{150^2 + 600^2 + 1.200^2} = 1.350 \text{ m}$

In einer Stunde sind es also 16.200 m, was 16,2 km entspricht.

Also hat der Ballon eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 16,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 12 (3+4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-3|-2|5), B(2|-3|3)$ und $C_k(k|-3|5)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie für $k = -10$ den Umfang des Dreiecks ABC_{-10}.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{30} \text{ LE} \qquad |\overrightarrow{BC_{-10}}| = \left| \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{148} \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AC_{-10}}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{50} \text{ LE} \qquad \rightarrow \qquad U \approx 27,71 \text{ LE}$$

b) Untersuchen Sie, ob es Werte von k gibt, für welche das Dreieck ABC_k gleichschenklig ist. Ist auch der Spezialfall gleichseitig möglich?

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC_k}| \Leftrightarrow \sqrt{30} = \sqrt{k^2 + 6k + 10} \quad \rightarrow \quad k_1 = -3 + \sqrt{29}$ und $k_2 = -3 - \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC_k}| \Leftrightarrow \sqrt{30} = \sqrt{k^2 - 4k + 8} \quad \rightarrow \quad k_3 = 2 + \sqrt{26}$ und $k_4 = 2 - \sqrt{26}$

$|\overrightarrow{AC_k}| = |\overrightarrow{BC_k}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 6k + 10} = \sqrt{k^2 - 4k + 8} \quad \rightarrow \quad k_5 = -\frac{1}{5}$

Für diese Werte k_1 bis k_5 ist ein gleichschenkliges Dreieck möglich.

Da es kein gemeinsames k für alle drei Seiten gibt, kann das Dreieck nie gleichseitig sein.

Aufgabe 13 (4+6 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|6|5), B(-1|6|5)$ und $C(-1|3|9)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ist. Bestimmen Sie einen Punkt D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

Es ist $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25}$ und $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{50}$. Daher ist das $\triangle ABC$ gleichschenklig.

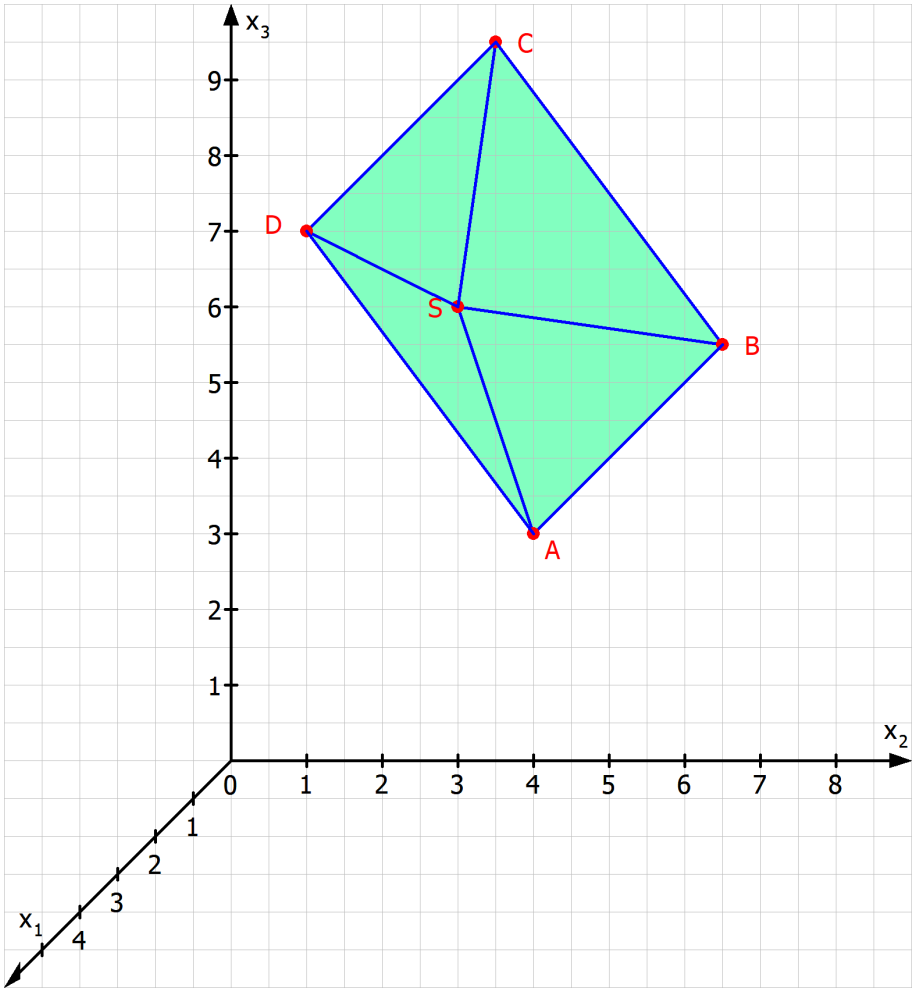
Rechtwinklig ist es, weil der Satz des Pythagoras gilt: $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ Für $D(4|3|9)$ ist das Viereck $ABCD$ ein Quadrat.

b) Das Quadrat $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(-2|2|5)$. Untersuchen Sie, ob die Seitenkanten der Pyramide alle gleich lang sind.

Es gilt: $|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{52}, |\overrightarrow{BS}| = \sqrt{17}; |\overrightarrow{CS}| = \sqrt{18}; |\overrightarrow{DS}| = \sqrt{53}$. Die Seitenkanten der Pyramide haben alle eine unterschiedliche Länge.

Stellen Sie die Pyramide im Schrägbild in einem kartesischen Koordinatensystem dar.



Übungsserie (18.03.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (1+1+3+2+3 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

b) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

c) $\vec{a} \circ \vec{b}$; $\vec{a} \circ \vec{c}$ und $\vec{b} \circ \vec{c}$

d) $|\vec{a} + \vec{b}|$ und $|\vec{a} - \vec{c}|$

e) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$

Aufgabe 2 (4 BE)

Gegeben ist ein Fünfeck $ABCDE$.
Machen Sie sich für die folgenden Aufgaben eine Skizze.
Geben Sie das Ergebnis der Rechnung mithilfe eines Vektors an.
Zum Beispiel: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ oder $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} =$

b) $\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{DE} =$

c) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} =$

d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} =$

Aufgabe 3 (3+4+4+2 BE)

Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit $A(4|0|0)$, $B(6|2|1)$, $C(8|-1|3)$ und $D(6|-3|2)$

a) Stellen Sie das Viereck $ABCD$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Berechnen Sie die Längen der Seiten.

c) Weisen Sie nach, dass $ABCD$ ein Rechteck ist.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $ABCD$.

Aufgabe 4 (3+3+2+2+2+2 BE)

Gegeben ist das $\triangle RST$ mit $R(-2|-1|0)$, $S(4|2|0)$ und $T(2|6|3)$.

a) Stellen Sie das $\triangle RST$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Berechnen Sie die Längen der Seiten.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks.

d) Weisen Sie nach, dass $\triangle RST$ rechtwinklig ist.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\triangle RST$

f) Beurteilen Sie, ob das $\triangle RST$ gleichschenklig ist.

Aufgabe 5 (5 BE)

Geben Sie die Koordinaten der Punkte A bis J an.

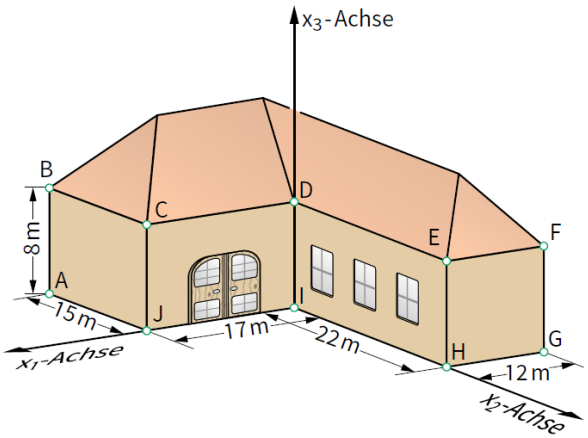


Abbildung 1: EdM 11. Sachsen, 2018, S. 166

Übungsserie (18.03.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (1+1+3+2+3 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \circ \vec{b} = -1$; $\vec{a} \circ \vec{c} = 6$ und $\vec{b} \circ \vec{c} = 8$

d) $|\vec{a} + \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{13}$ und $|\vec{a} - \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{18}$

e) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (4 BE)

Gegeben ist ein Fünfeck $ABCDE$.
Machen Sie sich für die folgenden Aufgaben eine Skizze.
Geben Sie das Ergebnis der Rechnung mithilfe eines Vektors an.
Zum Beispiel: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ oder $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

b) $\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$

d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$

Aufgabe 3 (3+4+4+2 BE)

Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit $A(4|0|0)$, $B(6|2|1)$, $C(8|-1|3)$ und $D(6|-3|2)$

a) Stellen Sie das Viereck $ABCD$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
Zeichnung mit korrekter Achsenbeschriftung und korrekt eingetragenen Punkten

b) Berechnen Sie die Längen der Seiten.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |\vec{a}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad |\vec{b}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad |\vec{c}| = \sqrt{2+2+1} = \sqrt{9} = 3 \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{DA} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad |\vec{d}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \text{ LE}$$

c) Weisen Sie nach, dass $ABCD$ ein Rechteck ist.

Es gilt: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, also sind $\vec{a}$ und $\vec{c}$ gleich lang (siehe Aufgabe b)) und $\vec{a} \parallel \vec{c}$
Gleiches gilt auch für $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{DA}$, da $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$.

Also sind die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang. Fehlt noch der rechte Winkel.

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 - 6 + 2 = 0, \text{ also ist das Viereck rechtwinklig.}$$

$\Rightarrow \quad ABCD$ ist ein Rechteck.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $ABCD$.

Möglichkeit 1: Da es ein Rechteck ist, gilt $A = a \cdot b = \sqrt{9} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{153}$ FE

Möglichkeit 2: $|\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49+4+100} = \sqrt{153}$ FE

(Bemerkung: $\sqrt{153} = 3 \cdot \sqrt{17}$)

Aufgabe 4 (3+3+2+2+2+2 BE)

Gegeben ist das $\triangle RST$ mit $R(-2|-1|0)$, $S(4|2|0)$ und $T(2|6|3)$.

a) Stellen Sie das $\triangle RST$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
Zeichnung mit korrekter Achsenbeschriftung und korrekt eingetragenen Punkten

b) Berechnen Sie die Längen der Seiten.

$$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad |\overrightarrow{RS}| = \sqrt{36+9+0} = \sqrt{45} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad |\overrightarrow{ST}| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{TR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad |\overrightarrow{TR}| = \sqrt{16+49+9} = \sqrt{74} \text{ LE}$$

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks.

$$M\left(\frac{-2+4+2}{3}\middle|\frac{-1+2+6}{3}\middle|\frac{0+0+3}{3}\right) \quad \rightarrow \quad M\left(\frac{4}{3}\middle|\frac{7}{3}\middle|1\right)$$

d) Weisen Sie nach, dass $\triangle RST$ rechtwinklig ist.

Bei irgendeinem Vektorpaar muss das Skalarprodukt also 0 sein.

$\overrightarrow{RS} \circ \overrightarrow{ST} = 0$, also bestitzt das $\triangle RST$ einen rechten Winkel im Punkt S.

(Zum Vergleich: $\overrightarrow{ST} \circ \overrightarrow{TR} = -29$ und $\overrightarrow{RS} \circ \overrightarrow{TR} = -45$)

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\triangle RST$

Möglichkeit 1: Da es ein rechtwinkliges Dreieck ist, gilt:
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2}\sqrt{45} \cdot \sqrt{29} = \frac{1}{2}\sqrt{1305}$ FE

Möglichkeit 2: $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{ST}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ 30 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{81+324+900} = \frac{1}{2}\sqrt{1305}$ FE

(Bemerkung: $\sqrt{1305} = 3 \cdot \sqrt{145}$)

f) Beurteilen Sie, ob das $\triangle RST$ gleichschenklig ist.

Da keine Seite gleich lang ist (vergleiche Aufgabe b)), ist das Dreieck nicht gleichschenklig, sondern unregelmäßig.

Aufgabe 5 (5 BE)

Geben Sie die Koordinaten der Punkte A bis J an.

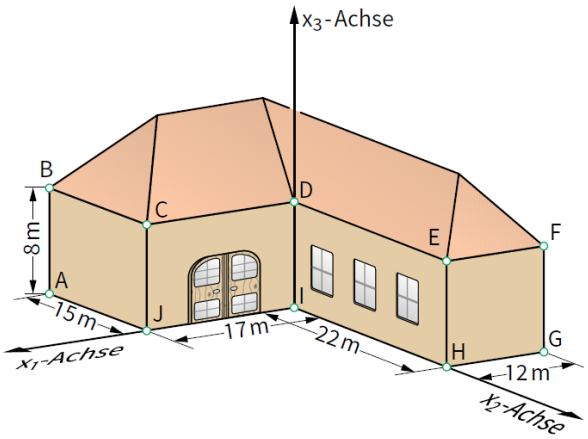


Abbildung 1: EdM 11. Sachsen, 2018, S. 166

$A(17|-15|0)$ $B(17|-15|8)$ $C(17|0|8)$ $D(0|0|8)$ $E(0|22|8)$

$F(-12|22|8)$ $G(-12|22|0)$ $H(0|22|0)$ $I(0|0|0)$ $J(17|0|0)$

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren (02.02.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (4 BE)

Überprüfen Sie, ob die Vektoren voneinander linear abhängig oder unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ -11 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (6 BE)

Untersuchen Sie, ob es Werte für den Parameter t gibt, sodass die drei Vektoren voneinander linear abhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 10 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ t+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ t+3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|0|0)$, $B(6|2|1)$ und $C(8|-1|3)$.
Zeigen Sie, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 4 (4 BE)

Gegeben sind die Punkte $R(-2|-1|0)$ und $S(4|2|0)$. Geben Sie einen Punkt T so an, dass

a) RST ein Dreieck bildet.

b) RST kein Dreieck bildet.

Begründen Sie Ihre Angabe.

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren (02.02.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (4 BE)

Überprüfen Sie, ob die Vektoren voneinander linear abhängig oder unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ -11 \end{pmatrix}$ linear abhängig

Aufgabe 2 (6 BE)

Untersuchen Sie, ob es Werte für den Parameter t gibt, sodass die drei Vektoren voneinander linear abhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 10 \end{pmatrix}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 8, a = 4, b = -2$$

Für $t = 8$ sind die Vektoren linear abhängig.

b) $\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 0, a = -1, b = -4 \text{ oder } t = 3, a = 5, b = 2$$

Für $t = 0$ oder $t = 3$ sind die Vektoren linear abhängig.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ t+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ t+3 \end{pmatrix}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ t+3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -1, b = 2$$

Das heißt also, die Vektoren sind immer linear abhängig, egal was für t eingesetzt wird. Damit ist $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3 (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|0|0)$, $B(6|2|1)$ und $C(8|-1|3)$.
Zeigen Sie, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wenn beide linear abhängig sind, dann sind sie parallel und durch den gemeinsamen Ausgangspunkt A sogar auf einer Geraden. Sind sie unabhängig, bilden sie ein Dreieck und keine Gerade.

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \rightarrow & a = 2 \\ \rightarrow & a = -0,5 \\ \rightarrow & a = 3 \end{matrix}\right\} a \text{ ist nicht eindeutig } \rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ und } \overrightarrow{AC} \text{ sind linear unabhängig}$$

Aufgabe 4 (4 BE)

Gegeben sind die Punkte $R(-2|-1|0)$ und $S(4|2|0)$. Geben Sie einen Punkt T so an, dass

a) RST ein Dreieck bildet.

b) RST kein Dreieck bildet.

Begründen Sie Ihre Angabe.

$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu dem Vektor $\overrightarrow{RS}$ wird in Aufgabe a) ein linear unabhängiger Vektor gesucht und in Aufgabe b) ein linear abhängiger Vektor gesucht. Dieser wird dann an den Ortsvektor von R, also $\overrightarrow{OR}$, addiert und so erhält man den Punkt T.

a) Ein möglicher Vektor wäre $\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann wäre $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(4|-4|0)$

b) Eine Möglichkeit T zu bilden, wäre beispielsweise $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OR} + 2 \cdot \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann würde $T(10|5|0)$ auch auf einer Geraden mit R und S liegen, weil $\overrightarrow{OT}$ eine Linearkombination von $\overrightarrow{OR}$ und $\overrightarrow{RS}$ ist.

Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt (24.02.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

b) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

c) $\vec{a} \circ \vec{b}$; $\vec{a} \circ \vec{c}$ und $\vec{b} \circ \vec{c}$

d) $|\vec{a} + \vec{b}|$ und $|\vec{a} - \vec{c}|$

e) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$

Aufgabe 2 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

Aufgabe 4 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

Aufgabe 5 (6 BE)

Machen Sie sich eine Übersicht über folgende Vierecksarten und deren Eigenschaften: Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Rhombus/Raute, Trapez und gleichschenkliges Trapez.

Aufgabe 6 (3 + 6 BE + 2 Zusatzpunkte)

Gegeben ist eine Pyramide $ABCS$. Ihre Grundfläche ist das Dreieck ABC. Die Punkte haben in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten

$$A(6|2|1), B(6|8|1), C(2|5|3) \text{ und } S(8|5|10)$$

a) Stellen Sie die Pyramide $ABCS$ in einem Koordinatensystem dar.

b) Prüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

- Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
- Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.
- Der Punkt $P(0|6,5|4)$ liegt auf der Dreiecksseite $\overline{AC}$.

c) Ergänzen Sie einen Punkt D, so dass $ABDC$ ein Parallelogramm bildet.

d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Aufgabe 7 (6 BE + 2 Zusatzpunkte)

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix}2\\4\\-8\end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Wählen Sie sich von den gegebenen Vektoren nach eigenem Ermessen welche aus und erklären Sie die Begriffe *kollinear*, *komplanar* und *linear unabhängig*.

Für Zusatzpunkte: Stellen Sie diese Begriffe mithilfe einer graphischen Skizze dar.

Aufgabe 8 (3 BE)

Begründen Sie, dass das Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen der Determinante verändert.

Zusatzaufgabe für die mathematisch Interessierten

Weisen Sie folgende Identität für alle $w, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mithilfe der Norm- bzw. Skalarproduktaxiome nach:

- $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z\rangle = \lambda \cdot \langle x, z\rangle + \mu \cdot \langle y, z\rangle$
- $\langle x, \lambda \cdot y + \mu \cdot z\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle + \mu \cdot \langle x, z\rangle$
- $\langle w + x, y + z\rangle = \langle w, y\rangle + \langle w, z\rangle + \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
- $\langle -x, -y\rangle = \langle x, y\rangle$
- $\langle -x, y\rangle = \langle x, -y\rangle$
- $\langle x, 0\rangle = 0$
- $\|-x\| = \|x\|$
- $\|x - z\| \leqq \|x - y\| + \|y - z\|$
- $\|\lambda \cdot x + \mu \cdot y\| \leqq |\lambda| \cdot \|x\| + |\mu| \cdot \|y\|$

Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt (24.02.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} \circ \vec{b}$; $\vec{a} \circ \vec{c}$ und $\vec{b} \circ \vec{c}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -4$ $\quad$ $\vec{a} \circ \vec{c} = 0 + 2 + 0 = 2$ $\quad$ $\vec{b} \circ \vec{c} = 0 - 4 + 3 = -1$

d) $|\vec{a} + \vec{b}|$ und $|\vec{a} - \vec{c}|$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{a} - \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

e) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 2 \\ -4 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 0 - 6 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 2 \\ 0 - (-3) \\ -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b \\ z_a \cdot x_b - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} -x_b \\ -y_b \\ -z_b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_b \cdot z_a - (-z_b) \cdot y_a \\ -z_b \cdot x_a - (-x_b) \cdot z_a \\ -x_b \cdot y_a - (-y_b) \cdot x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_b \cdot z_a + z_b \cdot y_a \\ -z_b \cdot x_a + x_b \cdot z_a \\ -x_b \cdot y_a + y_b \cdot x_a \end{pmatrix}$$

Aus $-y_b \cdot z_a + z_b \cdot y_a$ wird nach Vertauschung der Summanden der Term $z_b \cdot y_a - y_b \cdot z_a$. Tauscht man nun noch die Faktoren, so wird aus $z_b \cdot y_a - y_b \cdot z_a$ der Term $y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b$. Daher gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - z_a \cdot y_b \\ z_a \cdot x_b - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_b \cdot z_a + z_b \cdot y_a \\ -z_b \cdot x_a + x_b \cdot z_a \\ -x_b \cdot y_a + y_b \cdot x_a \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2 + (z_a)^2} = \sqrt{x_a \cdot x_a + y_a \cdot y_a + z_a \cdot z_a}$$

$$\sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}} = \sqrt{x_a \cdot x_a + y_a \cdot y_a + z_a \cdot z_a}$$

Also gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$

Aufgabe 4 (4 BE)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b + x_c \\ y_b + y_c \\ z_b + z_c \end{pmatrix} = x_a \cdot (x_b + x_c) + y_a \cdot (y_b + y_c) + z_a \cdot (z_b + z_c)$$

$$= x_a \cdot x_b + x_a \cdot x_c + y_a \cdot y_b + y_a \cdot y_c + z_a \cdot z_b + z_a \cdot z_c$$

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b + x_a \cdot x_c + y_a \cdot y_c + z_a \cdot z_c$$

Beide Ausdrücke sind gleich. Dazu müssen nur noch verschiedene Summanden umsortiert werden.

Aufgabe 5 (6 BE)

Machen Sie sich eine Übersicht über folgende Vierecksarten und deren Eigenschaften: Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Rhombus/Raute, Trapez und gleichschenkliges Trapez.

Eine sehr gute Übersicht finden Sie beispielsweise hier: `https://de.serlo.org/mathe/geometrie/dreiecke-vierecke-kreise-andere-ebene-figuren/viereck/beziehungen-zwischen-vierecken/haus-vierecke`. Im Unterricht haben wir die grundlegenden Eigenschaften in Ausdrücken der Analytischen Geometrie für jedes Viereck formuliert. Zur Erinnerung:

parallel: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow k \cdot \vec{a} = \vec{b}$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{R}$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, weil $\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, weil es kein $k \in \mathbb{R}$ gibt

gleich lang: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

gleich lang und parallel: $(\pm 1) \cdot \vec{a} = \vec{b}$

rechtwinklig: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Aufgabe 6 (3 + 6 BE + 2 Zusatzpunkte)

Gegeben ist eine Pyramide $ABCS$. Ihre Grundfläche ist das Dreieck ABC. Die Punkte haben in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten

$$A(6|2|1), B(6|8|1), C(2|5|3) \text{ und } S(8|5|10)$$

a) Stellen Sie die Pyramide $ABCS$ in einem Koordinatensystem dar.

Eigene Darstellung

b) Prüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.

  $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 18 \neq 0, \qquad \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = -18 \neq 0, \qquad \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC} = 11 \neq 0$

  $\Rightarrow \triangle ABC$ ist nicht rechtwinklig.

- Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

  $|\overrightarrow{AB}| = 6$ LE, $\qquad |\overrightarrow{BC}| = 29$ LE, $\qquad |\overrightarrow{AC}| = 29$ LE

  Das $\triangle ABC$ ist gleichschenklig, da $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$ ist.

- Der Punkt $P(0|6,5|4)$ liegt auf der Dreiecksseite $\overline{AC}$.

  $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4,5 \\ 3 \end{pmatrix} = 1,5 \cdot \overrightarrow{AC}$, daher muss der Punkt P außerhalb der Seite $\overline{AC}$ liegen.

c) Ergänzen Sie einen Punkt D, so dass $ABDC$ ein Parallelogramm bildet.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad D(2|11|3)$$

d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

$$V = \frac{1}{6} \cdot det\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AS}\right) = \frac{1}{6} \cdot det \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (0 + 0 + 24 - 0 - 0 - (-216))$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 240 = 40 \text{ VE}$$

Aufgabe 7 (6 BE + 2 Zusatzpunkte)

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix}2\\4\\-8\end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Wählen Sie sich von den gegebenen Vektoren nach eigenem Ermessen welche aus und erklären Sie die Begriffe *kollinear*, *komplanar* und *linear unabhängig*.

Für Zusatzpunkte: Stellen Sie diese Begriffe mithilfe einer graphischen Skizze dar.

Skizze und Erklärung siehe Sitzung vom 02.02.2022
Kollinear sind z.B. $\vec{b}$ und $\vec{h}$, weil $-2 \cdot \vec{b} = \vec{h}$
Komplanar ist z.B. $\vec{a}$, $\vec{c}$ und $\vec{g}$, weil $2 \cdot \vec{a} + 8 \cdot \vec{c} = \vec{g}$ gilt.
Linear unabhängig sind z.B. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, weil $\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ nur die Lösung $\lambda = \mu = \kappa = 0$ hat.

Aufgabe 8 (3 BE)

Begründen Sie, dass das Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen der Determinante verändert.

Führt man die Definition der Determinante auf das Spatprodukt zurück, so gilt:

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

Weiterhin ist der Wert der oben angegebenen Determinante:

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Der Wert der negativen Determinante ist dementsprechend:

$$-det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = -a_1b_2c_3 - b_1c_2a_3 - c_1a_2b_3 + a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1$$

Hier wurden jetzt die Summanden farblich markiert, damit diese nachher nur noch verglichen werden müssen.

Vertauscht man die ersten beiden Spalten, dann ist der Vorzeichenwechsel offensichtlich und wurde in Aufgabe 2 nachgewiesen, weil $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ gilt. Es muss also noch die Vertauschung von Spalte a und c sowie b und c berechnet und nachgewiesen werden.

$$det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{pmatrix} = a_1c_2b_3 + c_1b_2a_3 + b_1a_2c_3 - a_3c_2b_1 - c_3b_2a_1 - b_3a_2c_1$$

$$det \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{pmatrix} = c_1b_2a_3 + b_1a_2c_3 + a_1c_2b_3 - c_3b_2a_1 - b_3a_2c_1 - a_3c_2b_1$$

Daher verändert das Vertauschen zweier Spalten einer Determinante das Vorzeichen.

Zusatzaufgabe für die mathematisch Interessierten

Weisen Sie folgende Identität für alle $w, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mithilfe der Norm- bzw. Skalarproduktaxiome nach:

- $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z \rangle = \lambda \cdot \langle x, z \rangle + \mu \cdot \langle y, z \rangle$

  $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z \rangle \overset{(S2)}{=} \langle \lambda \cdot x, z \rangle + \langle \mu \cdot y, z \rangle \overset{(S1)}{=} \lambda \cdot \langle x, z \rangle + \mu \cdot \langle y, z \rangle$

- $\langle x, \lambda \cdot y + \mu \cdot z \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle + \mu \cdot \langle x, z \rangle$

  $\langle x, \lambda \cdot y + \mu \cdot z \rangle \overset{(S3)}{=} \langle \lambda \cdot y + \mu \cdot z, x \rangle \overset{\text{siehe oben}}{=} \lambda \cdot \langle y, x \rangle + \mu \cdot \langle z, x \rangle \overset{(S3)}{=} \lambda \cdot \langle x, y \rangle + \mu \cdot \langle x, z \rangle$

- $\langle w + x, y + z \rangle = \langle w, y \rangle + \langle w, z \rangle + \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

  $\langle w + x, y + z \rangle \overset{(S2)}{=} \langle w, y + z \rangle + \langle x, y + z \rangle \overset{(S3)}{=} \langle y + z, w \rangle + \langle y + z, x \rangle$

  $\overset{(S2)}{=} \langle y, w \rangle + \langle z, w \rangle + \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle \overset{(S3)}{=} \langle w, y \rangle + \langle w, z \rangle + \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

- $\langle -x, -y \rangle = \langle x, y \rangle$

  $\langle -x, -y \rangle \overset{(S1)}{=} -1 \cdot \langle x, -y \rangle \overset{(S3}{=} -1 \cdot \langle -y, x \rangle \overset{(S1)}{=} -1 \cdot (-1) \cdot \langle y, x \rangle \overset{(S3)}{=} 1 \cdot \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$

- $\langle -x, y \rangle = \langle x, -y \rangle$

  $\langle -x, y \rangle \overset{(S1)}{=} -1 \cdot \langle x, y \rangle \overset{(S3)}{=} -1 \cdot \langle y, x \rangle \overset{(S1)}{=} \langle -y, x \rangle \overset{(S3)}{=} \langle x, -y \rangle$

- $\langle x, 0 \rangle = 0$

  $\langle x, 0 \rangle \overset{(S3)}{=} \langle 0, x \rangle \overset{(S1)}{=} 0 \cdot \langle 0, x \rangle = 0$

- $\|-x\| = \|x\|$

  $\|-x\| = \|-1 \cdot x\| \overset{(N3)}{=} \underbrace{|-1|}_{=1} \cdot \|x\| = \|x\|$

- $\|x - z\| \leqq \|x - y\| + \|y - z\|$

  $|x - z\| = \|x \underbrace{-y + y}_{=0} - z\| \overset{N4}{\leqq} \|x - y\| + \|y - z\|$

- $\|\lambda \cdot x + \mu \cdot y\| \leqq |\lambda| \cdot \|x\| + |\mu| \cdot \|y\|$

  $\|\lambda \cdot x + \mu \cdot y\| \overset{(N4)}{\leqq} \|\lambda \cdot x\| + \|\mu \cdot y\| \overset{(N3)}{=} |\lambda| \cdot \|x\| + |\mu| \cdot \|y\|$

Geraden- und Ebenengleichungen (03.03.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (2+9+2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|0)$, $B(2|1|2)$, $C(0|3|0)$ und $D(2|0|5)$.

a) Stellen Sie die Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie verschiedene Geraden und Ebenengleichungen (Parameter- und Koordinatenform) durch die gegebenen Punkte.

c) Zeichnen Sie eine Ebene und eine Gerade aus b) in das Koordinatensystem von a) ein.

Aufgabe 2 (6+2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|-2)$, $B(1|2|-1)$ und $C(1|1|4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d|1|4)$.

a) Zeigen Sie, dass A, B und C die Eckpunkte eines Dreiecks sind und bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene in Parameter- und Koordinatenform, in der dieses Dreieck liegt.

b) Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Ermitteln Sie den Wert von d.

Aufgabe 3 (8+2+2 BE)

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene ε mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad \varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

a) Geben Sie jeweils 4 Punkte auf g und auf ε an.

b) Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(2|-3|5)$ von der Geraden g in der Ebene ε liegt.

c) Begründen Sie, dass g parallel zu ε ist.

d) Führen Sie die Überprüfung aus b) mithilfe der Koordinatenform von ε durch.

e) Beschreiben Sie, wie Sie mithilfe der Koordinatenform von ε begründen können, dass g parallel zu ε ist.

Aufgabe 4 (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|0|0)$, $B(6|2|1)$ und $C(8|-1|3)$.
Zeigen Sie mithilfe einer Geradengleichung, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 5 (4 BE)

Gegeben sind die Punkte $R(-2|-1|0)$ und $S(4|2|0)$. Geben Sie zwei Punkte T_1 und T_2 so an,

a) dass T_1 und T_2 auf der Strecke $\overline{RS}$ liegen.

b) dass T_1 und T_2 nicht auf der Geraden h durch R und S liegen.

Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 6 (3 + 4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(3|4|0)$, $B(-2|6|4)$, $C(7|-2|2)$ und $D(1|-2|8)$

a) Zeigen Sie, dass A, B und C ein Dreieck bilden.

b) Zeigen Sie, dass D nicht in der Ebene liegt, welche durch die Punkte A, B und C verläuft.

Zu) Berechnen Sie den Flächeninhalt des $\triangle ABC$.

Aufgabe 7 (10 BE)

Geben Sie die Koordinatenform der Ebene an.

a) Gegeben ist der Punkt $A(4|0|3)$ und der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Gegeben sind die Punkte $A(1|1|0)$, $B(2|3|3)$ und $C(1|2|4)$.

c) Gegeben sind die Punkte $A(-1|3|5)$, $B(2|3|6)$ und $C(5|5|5)$.

d) Gegeben sind die Punkte $A(2|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|6)$.

e) Gegeben sind die Punkte $A(-3|0|0)$, $B(0|15|0)$ und $C(0|0|\frac{2}{3})$.

Aufgabe 8 (15 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-2)$, $B(6|3|2)$ und $C(8|-1|2)$.

Gegeben sind weiterhin die Punkte

$$P_1(4|2|0), P_2(12|1|6), P_3(10|3|5), P_4(10|0|4) \text{ und } P_5(-2|-1|-6)$$

. Von diesen Punkten weiß man, dass jeder Punkt jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- Der Punkt liegt in der Ebene ε_{ABC}, aber nicht auf der Geraden g_{AB}.
- Der Punkt liegt auf der Geraden g_{AB} und in der Ebene ε_{ABC}.
- Der Punkt ist Eckpunkt des Parallelogramms $ABDC$.
- Der Punkt liegt nicht in der Ebene ε_{ABC}.
- Der Punkt liegt auf der Strecke $\overline{AB}$

Ordnen Sie die gegebenen Punkte begründet der jeweiligen Eigenschaft zu.

Aufgabe 9 (3+1 BE)

Geben Sie die Gleichung der Ebene $\varepsilon : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ in Parameterform an. Liegt der Punkt $P(0|8|15)$ in der Ebene?

Aufgabe 10 (3 BE)

Ermitteln Sie die parameterfreie Darstellung der Ebenengleichung

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Geraden- und Ebenengleichungen (03.03.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (2+9+2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|0)$, $B(2|1|2)$, $C(0|3|0)$ und $D(2|0|5)$.

a) Stellen Sie die Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie verschiedene Geraden und Ebenengleichungen (Parameter- und Koordinatenform) durch die gegebenen Punkte.

$$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad g_{BC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

$$g_{AC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad g_{BD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

$$g_{AD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad g_{CD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

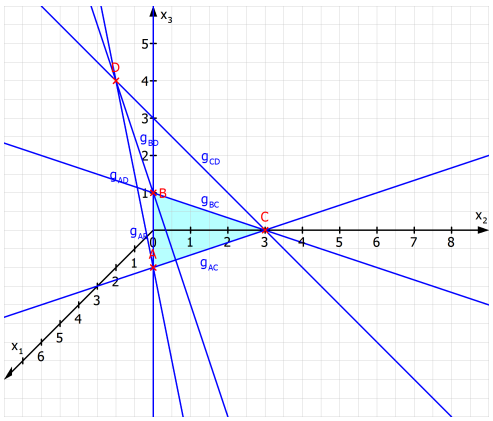
$$\varepsilon_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad -4x_1 - 4x_2 = -12$$

$$\varepsilon_{ABD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad 2x_1 = 4$$

$$\varepsilon_{ACD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad 10x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 30$$

$$\varepsilon_{BCD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 26$$

c) Zeichnen Sie eine Ebene und eine Gerade aus b) in das Koordinatensystem von a) ein.



Aufgabe 2 (6+2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|-2)$, $B(1|2|-1)$ und $C(1|1|4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d|1|4)$.

a) Zeigen Sie, dass A, B und C die Eckpunkte eines Dreiecks sind und bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene in Parameter- und Koordinatenform, in der dieses Dreieck liegt.

Weg 1 (linear unabhängig):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \rightarrow & k = 1 \\ \rightarrow & k = 0 \\ \rightarrow & k = 6 \end{matrix}\right\} k \text{ ist nicht eindeutig}$$

$\rightarrow \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig $\rightarrow ABC$ bildet ein Dreieck, weil sie nicht auf einer Geraden liegen.

Weg 2 (Geradengleichung)

$$g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punktprobe von C auf g_{AB}

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \rightarrow & t = 1 \\ \rightarrow & t = 0 \\ \rightarrow & t = 6 \end{matrix}\right\} t \text{ ist nicht eindeutig}$$

$\rightarrow C$ liegt nicht auf der Geraden durch $AB \rightarrow ABC$ bildet ein Dreieck.

Ebenengleichung in Parameterform: $\varepsilon_{ABC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Ebenengleichung in Koordinatenform: $\varepsilon_{ABC} : 6x_1 - 15x_2 - 3x_3 = -21$

b) Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Ermitteln Sie den Wert von d.

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} d-1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ Es muss gelten: $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BD} = 0$ (rechtwinklig in B)

$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BD} = -3d - 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = -3d - 1 \Leftrightarrow d = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 3 (8+2+2 BE)

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene ε mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad \varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

a) Geben Sie jeweils 4 Punkte auf g und auf ε an.

Beliebige t in g einsetzen und beliebige r, s in ε einsetzen $\rightarrow$ Punkte

z.B. $t = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow P_1(6|5|5) \in g$

z.B. $r = -2, s = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow P_2(-6|-4|15) \in \varepsilon$

b) Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(2|-3|5)$ von der Geraden g in der Ebene ε liegt.

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow}$ keine Lösung $\rightarrow C \notin \varepsilon$

c) Begründen Sie, dass g parallel zu ε ist.

Die Richtungsvektoren sind komplanar, da $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt.

Also liegt der Richtungsvektor von g parallel zu ε oder sogar in der Ebene.
Da aber nach Aufgabe b) der Stützvektor der Geraden nicht in ε liegt, ist $g \parallel \varepsilon$.

d) Führen Sie die Überprüfung aus b) mithilfe der Koordinatenform von ε durch.

$\varepsilon: -12x_3 = -180$ bzw. $\varepsilon: x_3 = 15$
Nun erkennt man bereits an der x_3-Koordinate des Punktes $(2|-3|5)$, dass gilt: $5 \neq 15$, damit liegt der Punkt nicht in der Ebene.

e) Beschreiben Sie, wie Sie mithilfe der Koordinatenform von ε begründen können, dass g parallel zu ε ist.

Eine Gerade ist parallel zu einer Ebene in Koordinatenform, wenn dass Skalarprodukt aus dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden Null ist (sie orthogonal zueinander sind). In diesem Fall gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g \perp \vec{n_\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad g \parallel \varepsilon$$

Aufgabe 4 (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(4|0|0)$, $B(6|2|1)$ und $C(8|-1|3)$.
Zeigen Sie mithilfe einer Geradengleichung, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \rightarrow & t = 2 \\ \rightarrow & t = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} t$ ist nicht eindeutig

$\rightarrow C \notin g_{AB}$

Aufgabe 5 (4 BE)

Gegeben sind die Punkte $R(-2|-1|0)$ und $S(4|2|0)$.

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geben zwei Punkte T_1 und T_2 so an, dass

a) T_1 und T_2 auf der Strecke $\overline{RS}$ liegen.

Wählen Sie ein t mit $0 \leqq t \leqq 1$, dann liegt das Ergebnis auf der Strecke $\overline{RS}$.
Wähle $t = \frac{1}{3} \rightarrow T_1(0|0|0)$ oder wähle $t = \frac{1}{2} \rightarrow T_2(1|0,5|0)$ Weitere Punkte möglich.

b) T_1 und T_2 nicht auf der Geraden h durch R und S liegen.

<u>Möglichkeit 1</u>: Beliebigen Punkt wählen und dann Punktprobe machen.

<u>Möglichkeit 2</u>: Einen beliebigen Punkt mit $x_3 \neq 0$ nehmen, weil:

$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$ nur erfüllt ist für $x_3 = 0$ und sonst nie.

Also z.B. $T_1(0|0|5)$ oder $T_2(0|0|7)$

Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 6 (3 + 4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(3|4|0)$, $B(-2|6|4)$, $C(7|-2|2)$ und $D(1|-2|8)$

a) Zeigen Sie, dass A, B und C ein Dreieck bilden.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad k \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \rightarrow & k = -\frac{4}{5} \\ \rightarrow & k = -3 \\ \rightarrow & k = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} k \text{ ist nicht eindeutig}$$

$\rightarrow \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind nicht kollinear $\rightarrow ABC$ bildet ein Dreieck, weil sie nicht auf einer Geraden liegen.

b) Zeigen Sie, dass D nicht in der Ebene liegt, welche durch die Punkte A, B und C verläuft.

$$\varepsilon_{ABC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; r, s \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ABC} : 28x_1 + 36x_2 + 38x_3 = 228$$

Punkt D in die Koordinatengleichung einsetzen führt zu:
$28 \cdot 1 + 36 \cdot (-2) + 38 \cdot 8 = 260 \neq 228 \Rightarrow D \notin \varepsilon_{ABC}$

Zu) Berechnen Sie den Flächeninhalt des $\triangle ABC$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \\ 38 \end{pmatrix} \right| \approx 29,68 \text{ FE}$$

Aufgabe 7 (10 BE)

Geben Sie die Koordinatenform der Ebene an.

a) Gegeben ist der Punkt $A(4|0|3)$ und der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\varepsilon : -x_1 + 12x_2 + 5x_3 = 11$

b) Gegeben sind die Punkte $A(1|1|0)$, $B(2|3|3)$ und $C(1|2|4)$.

$$\epsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \; ; \quad r, s \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon : 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$

c) Gegeben sind die Punkte $A(-1|3|5)$, $B(2|3|6)$ und $C(5|5|5)$.

$$\epsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad r, s \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon : -2x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 50$

d) Gegeben sind die Punkte $A(2|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|6)$.

$\varepsilon : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{6} = 1$

e) Gegeben sind die Punkte $A(-3|0|0)$, $B(0|15|0)$ und $C(0|0|\frac{2}{3})$.

$\varepsilon : -\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{15} + \frac{3x_3}{2} = 1$

Aufgabe 8 (15 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-2)$, $B(6|3|2)$ und $C(8|-1|2)$.

$\varepsilon_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Gegeben sind weiterhin die Punkte

$$P_1(4|2|0), P_2(12|1|6), P_3(10|3|5), P_4(10|0|4) \text{ und } P_5(-2|-1|-6)$$

. Von diesen Punkten weiß man, dass jeder Punkt jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- Der Punkt liegt in der Ebene ε_{ABC}, aber nicht auf der Geraden g_{AB}. (1)
- Der Punkt liegt auf der Geraden g_{AB} und in der Ebene ε_{ABC}. (2)
- Der Punkt ist Eckpunkt des Parallelogramms $ABDC$. (3)
- Der Punkt liegt nicht in der Ebene ε_{ABC}. (4)
- Der Punkt liegt auf der Strecke $\overline{AB}$ (5)

Ordnen Sie die gegebenen Punkte begründet der jeweiligen Eigenschaft zu.

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} r = \frac{1}{2}, s = 0$ dies entspricht der Bedingung (5).

$\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} r = 1, s = 1$ dies entspricht der Bedingung (3).

$\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow}$ keine Lösung dies entspricht der Bedingung (4).

$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} r = \frac{1}{2}, s = 1$ dies entspricht der Bedingung (1).

$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ABC} \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} r = -1, s = 0$ dies entspricht der Bedingung (2).

Aufgabe 9 (3+1 BE)

Geben Sie die Gleichung der Ebene $\varepsilon: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ in Parameterform an. Liegt der Punkt $P(0|8|15)$ in der Ebene?

Drei Punkte der Ebene angeben. Zum Beispiel: $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|2)$.

Parametergleichung aufstellen: $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Punktprobe. P in die Koordinatenform einsetzen führt zu: $0 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 15 = 61 \neq 6 \quad \rightarrow \quad P \notin \varepsilon$

Aufgabe 10 (3 BE)

Ermitteln Sie die parameterfreie Darstellung der Ebenengleichung

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \varepsilon : 7x_1 + 14x_2 + 7x_3 = d \quad \rightarrow \quad$ Punkt $(4|-1|4)$ einsetzen

$\rightarrow \quad \varepsilon : 7x_1 + 14x_2 + 7x_3 = 42$

Lagebeziehungen, Winkel und Abstände (24.03.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

Eine Gerade g ist gegeben durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

a) Geben Sie eine zweite zu g identische Gerade h an.

b) Geben Sie eine zweite zu g parallele Gerade k an.

c) Zeigen Sie, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 29 \\ 20 \\ -67 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Parameterdarstellung von g ist.

d) Bestimmen Sie die Spurpunkte von g.

Aufgabe 2 (1+1+3+3 BE)

Eine Tunnelbohrmaschine startet am Tunnelanfang $A(250|780|1030)$ und wird täglich um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ vorangetrieben (Einheit m).

a) Berechnen Sie, wie viele Meter die Bohrmaschine täglich schafft.

b) Nach 10 Tagen ist die Bohrung im Punkt B beendet. Geben Sie die Koordinaten des Tunnelendes B an.

c) Erläutern Sie, warum die Parameterdarstellung $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $k \in [0; 10]$ den Tunnel beschreibt und geben Sie drei Punkte innerhalb des Tunnels an.

d) Prüfen Sie, ob die folgenden Punkte auf der Tunnelstrecke liegen:
$E(270|800|1020), F(300|820|1010), G(310|840|1000)$.

Aufgabe 3 (3+2 BE)

Ein 200m hoher Sendemast steht im Punkt $F(40|-30|0)$ senkrecht auf einer ebenen Bodenfläche, die in der x_1-x_2-Ebene liegt (Angaben in m).
Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die Bodenfläche.

a) Die Sonnenstrahlen, die man als zueinander parallel annehmen kann, fallen in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix}$ ein. In welchem Punkt S endet der Schatten des Sendemastes?

b) Berechnen Sie die Länge des Schattens sowie den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen.

Aufgabe 4 (3+2+2 BE)

Die Position von Flugzeugen im Luftraum kann man durch Punkte in einem räumlichen Koordinatensystem mit der Einheit km beschreiben, bei dem die als Ebene betrachtete Erdoberfläche in der x_1-x_2-Ebene liegt. Ein Passagierflugzeug bewegt sich auf einem als geradlinig angenommenen Kurs von Punkt $P(8,5|-28|7,5)$ pro Sekunde um $\begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zum gleichen Zeitpunkt, in dem sich das Passagierflugzeug im Punkt P befindet, fliegt ein zweites Flugzeug vom Punkt $Q(22|15,5|7,3)$ aus geradlinig weiter, dass es sich pro Sekunde um den Vektor $\begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix}$ bewegt.

a) Untersuchen Sie, ob es auf den beiden Flugbahnen zu einer Kollision kommen kann. Falls nicht, bestimmen Sie den minimalen Abstand beider Flugzeuge.

b) Geben Sie die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge an.

c) Berechnen Sie die Strecke, die Flugzeug 1 und Flugzeug 2 nach 15 Sekunden jeweils zurückgelegt haben.

Aufgabe 5 (8 BE)

a) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 3x_1 + 2x_3 = 6$ parallel zur x_2-Achse ist.

b) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 2x_1 + 5x_2 = -10$ parallel zur x_3-Achse ist.

c) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 3x_2 + 5x_3 = 9$ parallel zur x_1-Achse ist.

d) Ziehen Sie eine Schlussfolgerung aus den Aufgabenteilen a) bis c).

Aufgabe 6 (4 BE)

Geben Sie die Spurpunkte der gegebenen Ebenen.

a) $\varepsilon : 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12$ b) $\varepsilon : 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12$

Aufgabe 7 (3+3+2+3+4+3 BE)

Gegeben seien die Punkte $A(0|0|8)$, $B(1|0|7)$, $C(1|1|3)$ und $D(0|2|0)$.

a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Ebene durch A, B und C in Parameterform und Koordinatenform.

b) Weisen Sie nach, dass alle vier Punkte in einer Ebene liegen und ein Trapez bilden.

c) Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs zur Ebene.

d) Bestimmen Sie den Abstand der gegebenen Punkte zur Ebene: $P_1(0|8|15), P_2(1|2|3), P_3(30|50|70)$.

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

f) Bestimmen Sie den Winkel im Punkt A dieses Trapezes. Geben Sie außerdem den Neigungswinkel des Trapezes gegenüber der $x_2 - x_3$-Ebene an.

Lagebeziehungen, Geraden und Ebenen (24.03.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (8 BE)

Eine Gerade g ist gegeben durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

a) Geben Sie eine zweite zu g identische Gerade h an.

z.B. $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

b) Geben Sie eine zweite zu g parallele Gerade k an.

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$

c) Zeigen Sie, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 29 \\ 20 \\ -67 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Parameterdarstellung von g ist.

Die Richtungsvektoren sind kollinear, weil $-5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix}$ gilt.

Fehlt nur noch der Nachweis, dass der Punkt $P(29|20|-67)$ auch auf g liegt.

$$\begin{pmatrix} 29 \\ 20 \\ -67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \\ -68 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & t = 17 \\ \rightarrow & t = 17 \\ \rightarrow & t = 17 \end{matrix} \Bigg\} \rightarrow t = 17$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 29 \\ 20 \\ -67 \end{pmatrix} \in g \quad \Rightarrow \quad \text{Die Geraden sind identisch.}$$

d) Bestimmen Sie die Spurpunkte von g.

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \tfrac{1}{4},\ x_1 = -\tfrac{9}{2},\ x_2 = \tfrac{13}{4} \Rightarrow S_{12}\left(-\tfrac{9}{2}|\tfrac{13}{4}|0\right)$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow t = -3,\ x_1 = -11,\ x_3 = 13 \Rightarrow S_{13}(-11|0|13)$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \tfrac{5}{2},\ x_2 = \tfrac{11}{2},\ x_3 = -9 \Rightarrow S_{23}\left(0|\tfrac{11}{2}|-9\right)$$

Aufgabe 2 (1+1+3+3 BE)

Eine Tunnelbohrmaschine startet am Tunnelanfang $A(250|780|1030)$ und wird täglich um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ vorangetrieben (Einheit m).

a) Berechnen Sie, wie viele Meter die Bohrmaschine täglich schafft.

$$\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow \text{Die Bohrmaschine schafft täglich 6 m.}$$

b) Nach 10 Tagen ist die Bohrung im Punkt B beendet. Geben Sie die Koordinaten des Tunnelendes B an.

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 290 \\ 820 \\ 1010 \end{pmatrix} \Rightarrow B(290|820|1010)$$

c) Erläutern Sie, warum die Parameterdarstellung $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $k \in [0; 10]$ den Tunnel beschreibt und geben Sie drei Punkte innerhalb des Tunnels an.

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{v};\ k \in [0; 10]$. Deshalb sind zumindest die Vektoren schon einmal korrekt. Bleibt nur noch die Frage übrig, warum $k \in [0; 10]$ ist. Für $k = 0$ kommt der Anfangspunkt A heraus und für $k = 10$ kommt der in b) berechnete Punkt B heraus.

d) Prüfen Sie, ob die folgenden Punkte auf der Tunnelstrecke liegen:

$E(270|800|1020), F(300|820|1010), G(310|840|1000)$.

$$\begin{pmatrix} 270 \\ 800 \\ 1020 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow k = 5 \Rightarrow E \text{ liegt im Tunnel}$$

$$\begin{pmatrix} 300 \\ 820 \\ 1010 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \left. \begin{matrix} \rightarrow & k = 12,5 \\ \rightarrow & k = 10 \\ \rightarrow & k = 10 \end{matrix} \right\} \text{es gibt kein } k \Rightarrow F \text{ liegt nicht im Tunnel}$$

$$\begin{pmatrix} 310 \\ 840 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 780 \\ 1030 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow k = 15 \Rightarrow G \text{ liegt nicht im Tunnel (sondern außerhalb)}$$

Aufgabe 3 (3+2 BE)

Ein 200m hoher Sendemast steht im Punkt $F(40|-30|0)$ senkrecht auf einer ebenen Bodenfläche, die in der x_1-x_2-Ebene liegt (Angaben in m).
Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die Bodenfläche.

a) Die Sonnenstrahlen, die man als zueinander parallel annehmen kann, fallen in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix}$ ein. In welchem Punkt S endet der Schatten des Sendemastes?

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 200 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung des Schattens der Sendemastspitze.

Die x_1-x_2-Ebene hat die Gleichung $\varepsilon_{12} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 200 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 4, r = 160, s = 90 \rightarrow S(160|90|0)$$

b) Berechnen Sie die Länge des Schattens sowie den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen.

$$\left| \begin{pmatrix} 160 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{28800} \approx 169,71$$

Der Schatten des Sendeturmes ist etwa 170 m lang.

$$\sin(\phi) = \frac{\begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ -50 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \approx -0,76 \quad \overset{\sin^{-1}}{\Rightarrow} \quad \phi \approx 49,7^\circ$$

Aufgabe 4 (3+2+2 BE)

Die Position von Flugzeugen im Luftraum kann man durch Punkte in einem räumlichen Koordinatensystem mit der Einheit km beschreiben, bei dem die als Ebene betrachtete Erdoberfläche in der x_1-x_2-Ebene liegt. Ein Passagierflugzeug bewegt sich auf einem als geradlinig angenommenen Kurs von Punkt $P(8,5|-28|7,5)$ pro Sekunde um $\begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zum gleichen Zeitpunkt, in dem sich das Passagierflugzeug im Punkt P befindet, fliegt ein zweites Flugzeug vom Punkt $Q(22|15,5|7,3)$ aus geradlinig weiter, dass es sich pro Sekunde um den Vektor $\begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix}$ bewegt.

a) Untersuchen Sie, ob es auf den beiden Flugbahnen zu einer Kollision kommen kann.

$$\begin{pmatrix} 8,5 \\ -28 \\ 7,5 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 15,5 \\ 7,3 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Daher schneiden sich die beiden Flugbahnen nicht.

$$\underline{\text{Abstand:}} \quad \frac{det \begin{pmatrix} -0,12 & 0,1 & 13,5 \\ 0,175 & -0,05 & 43,5 \\ 0 & 0,001 & -0,2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix} \right|} \approx \frac{0,009883}{0,011502} \approx 0,8592 \text{ km entspricht } 859,2 \text{ m}$$

b) Geben Sie die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge an.

Flugzeug 1 fliegt pro Sekunde: $\left| \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,175 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \approx 0,2122 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 212,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 763,9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Flugzeug 2 fliegt pro Sekunde: $\left| \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,05 \\ 0,001 \end{pmatrix} \right| \approx 0,1118 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 111,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 402,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) Berechnen Sie die Strecke, die Flugzeug 1 und Flugzeug 2 nach 15 Sekunden jeweils zurückgelegt haben.

Strecke von Flugzeug 1: $212,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15\text{s} = 3395,2\text{m} \approx 3,4\text{km}$

Strecke von Flugzeug 2: $111,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15\text{s} = 1677\text{m} \approx 1,68\text{km}$

Aufgabe 5 (8 BE)

a) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 3x_1 + 2x_3 = 6$ parallel zur x_2-Achse ist.

Variante 1 – Parametergleichung aufstellen durch drei Punkte:

Zum Beispiel: $S_1(2|0|0)$, $S_3(0|0|3)$, $P(4|1|-3)$

$$\rightarrow \quad \varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Die x_2-Achse hat die Gleichung $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Vgl. Sitzung vom 03. März 2022)

Gleichsetzen führt dazu, dass keine Lösung existiert. Deshalb muss die Gerade parallel zur Ebene sein.

b) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 2x_1 + 5x_2 = -10$ parallel zur x_3-Achse ist.

Variante 2 – Geradengleichung in die Koordinatenform einsetzen:

Die x_3-Achse hat die Gleichung $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Vgl. Sitzung vom 03. März 2022)

Einsetzen in die Koordinatenform ergibt: $2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \neq -10$, also gibt es keine Lösung. Daher muss die Gerade parallel zur Ebene sein.

c) Begründen Sie, dass die Ebene $\varepsilon : 3x_2 + 5x_3 = 9$ parallel zur x_1-Achse ist.

Analog zu Aufgabe a) oder b)

d) Ziehen Sie eine Schlussfolgerung aus den Aufgabenteilen a) bis c).

Immer wenn eine Komponente nicht in der Koordinatenform der Ebene vorkommt, ist die Ebene parallel zur entsprechenden Achse.

Aufgabe 6 (4 BE)

Bestimmen Sie die Spurpunkte der gegebenen Ebenen.

a) $\varepsilon : 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12$ $\quad S_1(4|0|0)$, $S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|-\frac{12}{5})$

b) $\varepsilon : 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12$ $\quad S_1(3|0|0)$, $S_2(0|-6|0)$ und $S_3(0|0|2)$

Aufgabe 7 (3+3+2+3+4+3 BE)

Gegeben seien die Punkte $A(0|0|8)$, $B(1|0|7)$, $C(1|1|3)$ und $D(0|2|0)$.

a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Ebene durch A, B und C in Parameterform und Koordinatenform.

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon : x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$

b) Weisen Sie nach, dass alle vier Punkte in einer Ebene liegen und ein Trapez bilden.

D in die Koordinatengleichung einsetzen: $0 + 4 \cdot 2 + 0 = 8$ ist eine wahre Aussage, also ist $D \in \varepsilon$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Da $2 \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ gilt, ist $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$. Die anderen Vektoren sind weder parallel noch gleich lang. Somit ist $ABCD$ ein Trapez, da es ein Paar parallele Seiten besitzt.

c) Bestimmen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs zur Ebene.

$$d(O, E) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 8 \right|}{\sqrt{18}} \approx 1,89 \text{ LE}.$$

d) Bestimmen Sie den Abstand der gegebenen Punkte zur Ebene: $P_1(0|8|15), P_2(1|2|3), P_3(30|50|70)$

$$d(P_1, E) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 8 \right|}{\sqrt{18}} \approx 9,19 \text{ LE}; \; d(P_2, E) \approx 0,94 \text{ LE}; \; d(P_3, E) \approx 68,83 \text{ LE}$$

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

$$\tfrac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| + \tfrac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| + \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| + \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \text{ FE} + \sqrt{18} \text{ FE} \approx 6,36 \text{ FE}$$

f) Bestimmen Sie den Winkel beim Punkt A in diesem Trapez.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \tfrac{8}{\sqrt{136}} \quad \overset{\cos^{-1}}{\Rightarrow} \quad \alpha \approx 46,7^\circ$$

$$\cos(\phi) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \approx 0,236 \quad \overset{\cos^{-1}}{\Rightarrow} \quad \phi \approx 76,4^\circ$$