# Grenzwerte und Stetigkeit Wiederholung Funktionen

H. Wuschke

09. August 2021

# Ziele der Sitzung

- Definitionsbereiche angeben
- reellwertige Funktionstypen wiederholen und mit markanten Eigenschaften beschreiben
- Einfluss von Parametern auf Funktionsgleichungen beschreiben

# Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich

## Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich

Eine Funktion f ordnet jedem  $x \in D$  eindeutig ein  $y \in W$  zu. Dabei heißt D auch der Definitionsbereich und W der Wertebereich von f

Häufig schreibt man für diese Zuordnung: y = f(x).

## Beispiele

$$f_1(x) = 2x - 3$$

Hier ist  $D = \mathbb{R}$  und  $W = \mathbb{R}$ , da alles eingesetzt werden kann und alles herauskommen kann.

$$f_2(x) = x^2 + 3$$
  
Hier ist  $D = \mathbb{R}$  und  $W = \{y \mid y \ge 3\}$ 

# eingeschränkter Definitionsbereich

# Funktionen mit uneingeschränktem Definitionsbereich

- Polynome
- trigonometrische Funktionen
- Exponentialfunktionen

## Funktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich

- Die Wurzelfunktion, wie zum Beispiel  $f(x) = \sqrt{x}$  ist nur für nichtnegative ( $\geq 0$ ) Werte definiert.
- Die Logarithmusfunktion, wie zum Beispiel  $f(x) = \ln(x)$  ist nur positive (> 0) Werte definiert.
- Gebrochenrationale Funktionen wie zum Beispiel  $f(x) = \frac{3}{x^2 4}$  sind nicht definiert, wenn durch 0 geteilt wird.

## Aufgaben A1

Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich an:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$g(x) = -x^3 - 2x^2$$

$$h(x) = \frac{x+1}{x-5} \cdot e^{3x}$$

$$k(x) = \ln(x - 8)$$

$$m(x) = \frac{1}{2}x - 5 + \sin(2x - 3)$$

$$n(x) = \frac{(x-3) \cdot x}{x^2 \cdot (x-8) \cdot (x+7)}$$

$$p(x) = 3x - \sqrt{x+16} + \frac{1}{x}$$

# Polynome – ganzrationale Funktionen

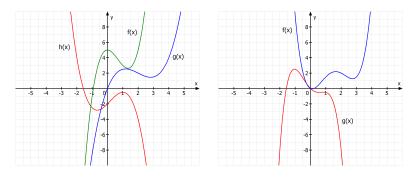


Abbildung: Polynome 3. und 4. Grades mit MatheGrafix 11, H.W. 08/21

# Wurzelfunktionen

Abbildung: Wurzelfunktionen mit MatheGrafix 11, H.W. 08/21

# Exponentialfunktionen zur Basis e

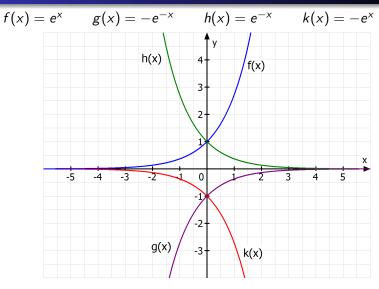


Abbildung: Exponentialfunktionen mit MatheGrafix 11, H.W. 08/21

# Exponentialfunktionen

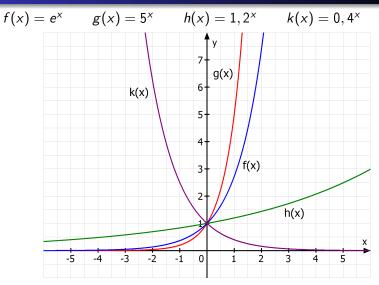


Abbildung: Exponentialfunktionen mit MatheGrafix 11, H.W. 08/21

# Trigonometrische Funktionen

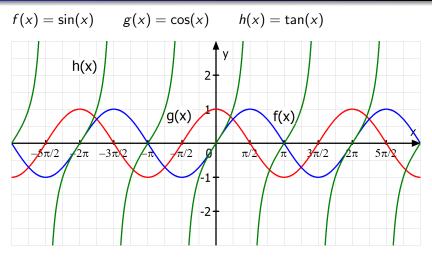


Abbildung: Trigonometrische Funktionen mit MatheGrafix 11, H.W. 08/21

# Einfluss der Parameter

#### Parametereinfluss

Sei f(x) eine beliebige Funktion. Dann gilt:

- $a \cdot f(x)$  streckt (|a| > 1) oder staucht (0 < |a| < 1) den Funktionsgraphen von f(x) entlang der y-Achse. Für a < 0 wird der Funktionsgraph an der x-Achse gespiegelt.
- $f(b \cdot x)$  streckt (0 < |b| < 1) oder staucht (|b| > 1) den Funktionsgraphen von f(x) entlang der x-Achse. Für b < 0 wird der Funktionsgraph an der y-Achse gespiegelt.
- f(x+c) verschiebt den Funktionsgraphen entlang der x-Achse in -c Einheiten. Dadurch verschiebt sich auch der Definitionsbereich.
- f(x) + d verschiebt den Funktionsgraphen entlang der y-Achse in d Einheiten. Dadurch verschiebt sich auch der Wertebereich

Parameter a kann den Wertebereich vergrößern/verkleinern und b kann den Definitionsbereich vergrößern/verkleinern.

# Beispiel für ein Applet

Hier gibt es ein Beispiel für unterschiedliche Funktionen. Dabei sind die Parameter nicht immer exakt so benannt, wie im Definitionskasten auf der vorherigen Folie https://www.geogebra.org/m/gWGuSwTd

## Aufgaben A2

Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ ,  $g(x) = \ln(x - 2)$  sowie  $h(x) = \sqrt{x^2 - 8}$ 

- a) Verschieben Sie die Funktionsgraphen: 3 LE  $\leftarrow$  und 2 LE  $\downarrow$
- b) Strecken Sie die Funktionsgraph um den Faktor 3 in Richtung der y-Achse.
- c) Stauchen Sie die Funktionsgraph um den Faktor  $\frac{1}{3}$  in Richtung der y-Achse.
- d) Verschieben Sie die Funktionsgraphen: 5 LE ← und 6 LE ↑ Welche Auswirkung auf Definitions- und Wertebereich lassen sich feststellen?

# 1. Grenzwerte und Stetigkeit 1.2 Zahlenfolgen und Grenzwert

H. Wuschke

12. August 2021

# Ziele der Sitzung

- mit Zahlenfolgen als speziellen Abbildungen umgehen
- den Grenzwert bzw. Limes als Konzept beschreiben
- Grenzwerte bestimmen mithilfe der Grenzwertsätze

# Zahlenfolge

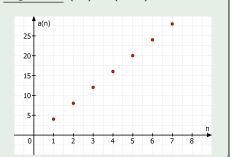
Eine Funktion  $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ;  $n \mapsto a_n$  heißt reelle Zahlenfolge. Die einzelnen Funktionswerte heißen Glieder der Zahlenfolge.

Notation:  $(a_1; a_2; a_3; a_4; ...)$  oder  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_n)$ 

#### Vielfache von 4

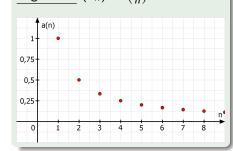
$$a_1 = 4$$
;  $a_2 = 8$ ;  $a_3 = 12$ ;  $a_4 = 16$ ; ...

allgemein: 
$$(a_n) = (4 \cdot n)$$



## Stammbrüche

$$a_1 = \frac{1}{1}$$
;  $a_2 = \frac{1}{2}$ ;  $a_3 = \frac{1}{3}$ ;  $a_4 = \frac{1}{4}$ ; ... allgemein:  $(a_n) = (\frac{1}{n})$ 



# weitere Beispiele

$$(n)_{n\in\mathbb{N}}=(1;2;3;...)$$
 Folge der natürlichen Zahlen

$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}=(-1;1;-1;...)$$
 alternierende Folge

$$(c)_{n\in\mathbb{N}}=(c;c;c;...)$$
 konstante Folge

$$(2^{n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (1; 2; 4; 8; ...)$$
 Zweierpotenzen

# Aufgaben A1

Geben Sie die ersten zehn Folgenglieder der Zahlenfolge an.

a) 
$$(a_n) = (7 \cdot n + 2)$$

b) 
$$(b_n) = (\sqrt[n]{6})$$

c) 
$$(c_n) = ((1 + \frac{1}{n})^n)$$

d) 
$$(d_n) = \left(\frac{n^2 + 2n - 1}{3n^2 - 5}\right)$$

## konvergent; Limes

Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$  heißt konvergent gegen  $g\in\mathbb{R}$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon>0$  ein  $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n\geqq N_\varepsilon$  gilt:

$$|a_n-g|<\varepsilon$$

Der Wert g heißt Grenzwert oder Limes der Folge  $(a_n)$ .

$$\underline{\text{symbolisch:}} \lim_{n \to \infty} a_n = g$$

## Epsilon-Umgebung

Der Limes einer Zahlenfolge gibt einen Wert an, dem sich die Funktion beliebig dicht nähert, ihn aber nicht notwendigerweise erreicht.

Dafür kann man sich zum Grenzwert einen beliebigen Abstand  $(\varepsilon)$  wählen und ab einem bestimmten Folgenglied  $a_{N_{\varepsilon}}$  haben alle nachfolgenden Folgenglieder  $(n \ge N_{\varepsilon})$  einen geringeren Abstand.

# Beispiel

Für die Zahlenfolge  $(a_n) = 30 + 90 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$  ist der Grenzwert g = 30.

Wähle beispielsweise  $\varepsilon = 4$ , dann ist das  $N_{\varepsilon}$  gesucht, für das gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

$$\left|30+90\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-30\right|<4\quad \stackrel{\mathsf{CAS}}{\Rightarrow}\quad n>10,8$$

Also ist  $N_{arepsilon}=11$ , denn ab  $a_{11}$  gilt für alle Folgenglieder  $|a_n-30|<4$ 

Wähle beispielsweise  $\varepsilon = 0,004$ , dann muss gelten:

$$\left|30+90\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-30\right|<0,004\quad \stackrel{\mathsf{CAS}}{\Rightarrow}\quad n>34,8$$

Also ist  $N_{\varepsilon}=35$ , denn ab  $a_{35}$  gilt für alle Folgenglieder  $|a_n-30|<0,004$ 

So kann das  $\varepsilon > 0$  also beliebig klein gewählt werden und es gilt.

# Veranschaulichung der Epsilon-Umgebung

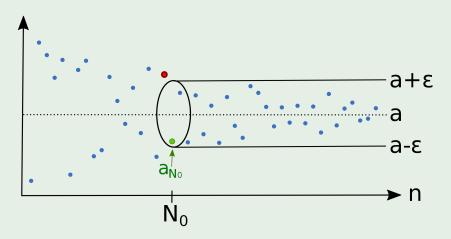


Abbildung: Veranschaulichung durch

https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe\_f%C3%BCr\_Nicht-Freaks: \_Grenzwert:\_Konvergenz\_und\_Divergenz

# Allgemeiner Nachweis für die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Die Vermutung ist, dass die Zahlenfolge gegen g=0 konvergiert.

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben.

Zu zeigen ist, dass es eine natürliche Zahl  $N_{\varepsilon}$  gibt, sodass für alle  $n \geq N_{\varepsilon}$  gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$
 bzw.  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ 

Wähle  $N_{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$  (immer möglich nach dem Satz von Archimedes), dann gilt:

$$|a_n - g| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \stackrel{\text{für } n \ge N_{\varepsilon}}{\le} \frac{1}{N_{\varepsilon}} < \varepsilon$$

Daher gilt: 
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

# beschränkte Folge

Sei  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge.  $(a_n)$  heißt

- (i) nach unten beschränkt, wenn es ein  $s \in \mathbb{R}$  gibt, so dass gilt:  $s \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
- (ii) nach oben beschränkt, wenn es ein  $S \in \mathbb{R}$  gibt, so dass gilt:  $a_n \leq S$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
- (iii) beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

## Aufgaben A2

Untersuchen Sie, ob die Folge nach oben bzw. unten beschränkt ist:

- a)  $(a_n) = (3 \frac{1}{n})$
- b)  $(b_n) = \left(\frac{n}{2}\right)$
- c)  $(c_n) = ((-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n})$
- d)  $(d_n) = ((-1)^n \cdot 2)$

# Satz über Beschränktheit von Folgen

Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$  ist genau dann beschränkt, wenn es ein  $c\in\mathbb{R}^+$  gibt, so dass für alle  $n\in\mathbb{N}$  gilt:  $|a_n|\leqq c$ 

<u>Beweis:</u> Wenn  $|a_n| \le c$  gilt, dann ist  $-c \le a_n \le |a_n| \le c$ , also ist  $a_n$  nach unten durch -c und nach oben durch c beschränkt.

Wenn  $a_n$  beschränkt ist, gibt es eine untere Schranke s und eine obere Schranke S. Definiere c nun als Maximum von |s| und |S| (symbolisch  $c := \max(|s|, |S|)$ ).

Dann ist  $-c \le a_n \le c$  und damit gilt  $|a_n| \le c$ .

## Bemerkung

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(Kann auch bewiesen werden.)

Nicht jede beschränkte Folge ist konvergent.

Beispiel:  $(a_n) = ((-1)^n)$ 

#### Grenzwertsätze

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen mit den Grenzwerten  $\lim_{n\to\infty}a_n=a$  und  $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ . Dann gilt:

(i) 
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

(ii) 
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

(iii) 
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ für } (b \neq 0)$$

(iv) 
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

# Beweis von (i)

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Da  $(a_n)$  und  $(b_n)$  nach Voraussetzung konvergent sind, gilt:

$$|a_n-a|<rac{arepsilon}{2}$$
 für alle  $n\geqq N_{arepsilon_1}$  und  $|b_n-b|<rac{arepsilon}{2}$  für alle  $n\geqq N_{arepsilon_2}$ 

Also ist 
$$|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
 für alle  $n \ge \max(N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_2})$ .



## Sandwich-Theorem

Seien  $(a_n),(b_n)$  und  $(c_n)$  drei Zahlenfolgen. Es gelte für alle  $n \geq N \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \leq c_n$ . Außerdem sei  $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = g$  Dann gilt auch  $\lim_{n \to \infty} b_n = g$ .

# Aufgaben A3

Bestimmen Sie den Grenzwert der gegebenen Folge.

a) 
$$(a_n) = (1 + \frac{1}{n})$$

b) 
$$(b_n) = \left(-8 + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$

c) 
$$(c_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

d) 
$$(d_n) = \left(\frac{2n+1}{n^2}\right)$$

e) 
$$(e_n) = \left(\frac{3n^2 - 4n^3 + 5}{2n^3 - 5n + 9}\right)$$

# 1. Grenzwerte und Stetigkeit 1.3 Grenzwerte von Funktionen

H. Wuschke

18. August 2021

# Ziele der Sitzung

- Übertragung der Grenzwertsätze auf Funktionen
- Asymptoten von Funktionen bestimmen
- die Art einer Definitionslücke als *Polstelle*, (hebbare) Lücke oder *Sprungstelle* unterscheiden

#### bestimmter Grenzwert von Funktionen

Sei  $f: D \to W; x \mapsto f(x)$  eine beliebige Funktion.

Weiterhin sei  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$  eine Zahlenfolge mit  $\lim_{n o\infty}x_n=x_0$ . Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

Dies heißt bestimmter Grenzwert der Funktion f an der Stelle  $x_0$ .

# Beispiel

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 5$$
. Zu bilden ist  $\lim_{x \to 2} f(x)$ .

Beispielsweise gilt für  $(x_n) = (2 + \frac{1}{n})$ , dass  $\lim_{n \to \infty} x_n = 2$  ist. Also ist

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(3 \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 - 5\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(12 + \frac{12}{n} + \frac{3}{n^2} - 5\right) = 7$$

## Bemerkung

In der Definition ist die Zahlenfolge  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$  beliebig.

Aus mathematischer Sicht, genügt es also nicht, eine beispielhafte Folge zu nehmen, um den Grenzwert zu bestimmen. Für die Schule ist dies jedoch ausreichend.

#### unbestimmter Grenzwert von Funktionen

Sei  $f: D \to W; x \mapsto f(x)$  eine beliebige Funktion.

Weiterhin sei  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$  eine Zahlenfolge mit  $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ . Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Dies heißt unbestimmter Grenzwert der Funktion f an der Stelle  $x_0$ .

## Aufgaben A1

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte händisch und überprüfen Sie anschließend mit dem CAS.

- a)  $\lim_{x\to 1} (x^3 6x + 5)$
- b)  $\lim_{x \to 2} e^{\frac{2x^2+5}{x^4-16}}$

#### Verhalten im Unendlichen

Seien  $(x_n)$  und  $(y_n)$  Zahlenfolgen mit  $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$  bzw.  $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ .

Dann bezeichnet man für die Funktion  $f: D \to W; x \mapsto f(x)$ 

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

als **Verhalten** im **Unendlichen** oder Globalverhalten von f.

## Aufgaben A2

Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen für die gegebenen Funktionen mithilfe des CAS.

$$f(x) = x^3 - 6x + 5$$

$$k(x) = \frac{3}{x^2 + 2}$$

$$g(x) = e^{\frac{2x^2 + 5}{x^4 - 16}}$$

$$m(x) = \frac{-3x^2 + 7x - 80}{5x^2 + 9}$$

$$h(x) = -3x^5 + 6x^3 + 2x^2$$

$$n(x) = 1, 4^x + 3$$

$$j(x) = 7x^2 + 3x - 8.000$$

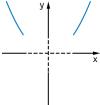
$$p(x) = 0, 3^x - 4$$

## Verhalten im Unendlichen von Polynomen

Man kann den Globalverlauf einer ganzrationalen Funktion f mit

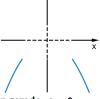
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

vom Grad n auf einen der folgenden Funktionstypen mit  $y = a_n x^n$  zurückführen:



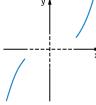
n gerade,  $a_n > 0$ 

 $f(x) \to \infty$  für  $x \to -\infty$ 



n gerade, a<sub>n</sub> < 0

 $f(x) \to -\infty$  für  $x \to -\infty$   $f(x) \to -\infty$  für  $x \to -\infty$   $f(x) \to \infty$  für  $x \to -\infty$ 



n ungerade, a<sub>n</sub> > 0

 $f(x) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty \qquad \qquad f(x) \to -\infty \quad \text{für } x \to \infty \qquad \qquad f(x) \to -\infty \quad \text{für } x \to \infty$ 

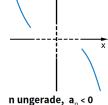


Abbildung: EdM 11 Sachsen, S. 14.

#### Notation

Ist 
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)$$
 schreibt man auch  $\lim_{x \to \pm \infty} f(x)$ 

# Beispiele:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + x^2 - x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} (x^4 + x^2 - x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \pm \infty} (x^4 + x^2 - x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + x^2 - x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} (-x^4 + x^2 - x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm \infty} (-x^4 + x^2 - x) = -\infty$$

# Beispiel für Grenzwert an einer Stelle

$$g(x)=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \frac{1}{2} \qquad \qquad \lim_{x \to -\frac{2}{45}} g(x) = -\frac{45}{2}$$

$$\lim_{x \to 42} g(x) = \frac{1}{42} \qquad \qquad \lim_{x \to -5437} g(x) = -\frac{1}{5437}$$

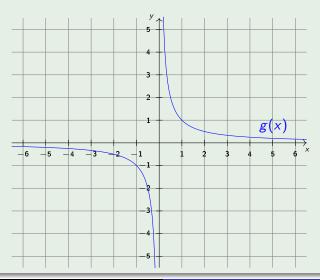
$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \qquad \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

Also ist 
$$\lim_{x \to \pm \infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = ???$$

# Beispiel für Grenzwert an einer Stelle

$$g(x)=\frac{1}{x}$$



# links- und rechtsseitiger Grenzwert

Der linksseitige Grenzwert einer Funktion f(x) an einer Stelle  $x_0$  ist der Wert, dem sich die Funktion für alle  $x < x_0$  beliebig dicht annähert.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Der rechtsseitige Grenzwert einer Funktion f(x) an einer Stelle  $x_0$  ist der Wert, dem sich die Funktion für alle  $x > x_0$  beliebig dicht annähert.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

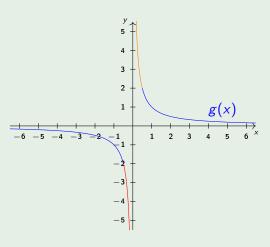
Wenn 
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
 so ist dies der Grenzwert  $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 

Wenn  $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$  so existiert der Grenzwert  $\lim_{x \to x_0} f(x)$  nicht.

# Beispiel für Grenzwert an einer Stelle

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

 $\lim_{x\to 0} g(x) \text{ existient nicht.}$ 



$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$$

## Aufgaben A3

Überprüfen Sie, ob die Grenzwerte existieren, indem Sie den linksund den rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle untersuchen.

a) 
$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$$

b) 
$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$$

c) 
$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$$

d) 
$$\lim_{x \to -2} \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$$

# Asymptoten und Definitionslücken

#### waagerechte Asymptote

Gilt  $\lim_{x \to \pm \infty} f(x) = c$ , so hat f(x) eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung y = c

#### Arten von Definitionslücken

Eine Definitionslücke ist eine Stelle  $x_0$ , an der f(x) nicht definiert ist.

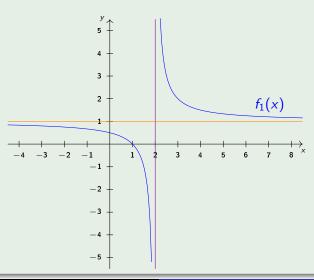
Gilt  $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ , heißt die Stelle  $x_0$  (hebbare) Lücke.

Gilt  $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = c$  und  $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = d$ , heißt die Stelle  $x_0$  Sprungstelle.

Gilt  $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm \infty$ , heißt die Stelle  $x_0$  Polstelle mit senkrechter Asymptote  $x = x_0$ .

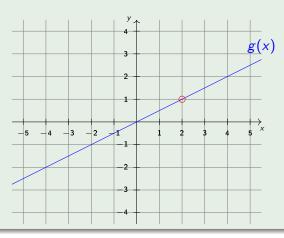
#### Beispiel für Definitionslücken - Polstelle

$$f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1$$
 Asymptoten bei  $x = 2$  und  $y = 1$ 



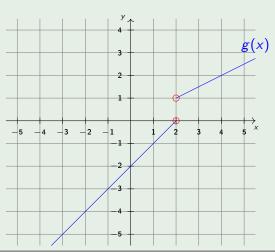
## Beispiel für Definitionslücken – (hebbare) Lücke

$$f_2(x) = \frac{0.5x \cdot (x-2)}{(x-2)} \neq 0.5x$$



## Beispiel für Definitionslücken – Sprungstelle

$$f_3(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 2\\ \frac{1}{2}x, & x > 2 \end{cases}$$



#### Aufgabe A4

Untersuchen Sie die Funktion  $f(x) = \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$  auf Polstellen, (hebbare) Lücken, Nullstellen und Asymptoten. Stellen Sie anschließend den Funktionsgraphen in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

#### Aufgaben A5

Geben Sie eine Funktion mit folgenden Eigenschaften an:

- a) waagerechte Asymptote y = 7.
- b) Polstelle bei  $x_0 = 8$ .
- c) (hebbare) Lücke an der Stelle  $x_0 = 6$ .
- d) Definitionsbereich  $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ .
- e) Polstelle bei  $x_0 = -5$ ; Lücke bei  $x_1 = 0$ .
- f) Polstellen bei  $x_0 = -19$  und  $x_1 = 17$ , Lücke bei  $x_2 = 23$  und waagerechte Asymptote y = 15.

# Grenzwerte und Stetigkeit Stetigkeit von Funktionen

H. Wuschke

30. August 2021

#### Stetigkeit

Eine Funktion f(x) heißt stetig an einer Stelle  $x_0$ , wenn gilt:

$$f(x_0) = c$$
 und  $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ 

Eine Funktion f(x) heißt stetige Funktion, wenn sie an jeder Stelle stetig ist.

#### anschauliche Stetigkeit

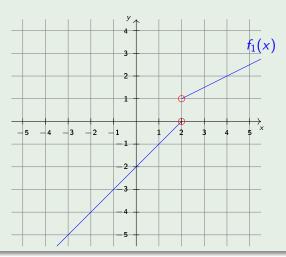
Anschaulich kann man sagen, dass eine Funktion stetig ist, wenn man sie durchzeichnen kann. Dabei darf man jedoch bei Definitionslücken den Stift absetzen.

#### Bemerkung

Alle Polynome sind stetig. In der Regel sind die Funktionen, die in der Schule vorkommen stetig.

## Beispiel Stetigkeit (wenn Sprungstelle nicht im DB ist)

$$f_1(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 2\\ \frac{1}{2}x, & x > 2 \end{cases}$$



## Begründung Beispiel 1

$$f_1(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 2 \\ \frac{1}{2}x, & x > 2 \end{cases}$$

Für x < 2 und x > 2 besteht die Funktion aus Polynomen (lineare Funktionen). Dort ist die Funktion also stetig.

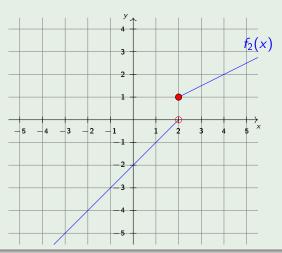
Kritisch scheint also nur die Stelle x = 2 zu sein.

Weil aber  $f_1(2)$  gar nicht existiert, braucht hier auch keine Untersuchung auf Stetigkeit gemacht werden.

Daher ist also die Funktion  $f_1(x)$  stetig auf ihrem Definitionsbereich.

## Beispiel Unstetigkeit

$$f_2(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 2\\ \frac{1}{2}x, & x \ge 2 \end{cases}$$



#### Begründung Beispiel 2

$$f_2(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 2\\ \frac{1}{2}x, & x \ge 2 \end{cases}$$

Für x < 2 und x > 2 ist  $f_2(x)$  stetig. Es ist  $f_2(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ .

Für den linksseitigen Grenzwert gilt:  $\lim_{x\to 2^-} f_2(x) = 0$ .

Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt:  $\lim_{x \to 2^+} f_2(x) = 1$ 

Da  $\lim_{x\to 2^-} f_2(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f_2(x)$  ist, existiert  $\lim_{x\to 2} f_2(x)$  nicht.

Daher ist  $f_2(x)$  an der Stelle x = 2 unstetig.

#### Bemerkung

Bei der Stetigkeitsuntersuchung an einer Stelle muss gelten:

Grenzwert an der Stelle = Funktionswert an der Stelle

#### Aufgaben A1

Überprüfen Sie, ob die nachfolgenden Funktionen stetig sind:

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x < 5 \\ x + 2, & x \ge 5 \end{cases}$$
 (unstetig an der Stelle  $x = 5$ )
$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < -2 \\ x + 6, & -2 \le x < 2 \\ 9, & x \ge 2 \end{cases}$$
 (unstetig an der Stelle  $x = 2$ )
$$h(x) = \begin{cases} -3x, & x \le 4 \\ x^2 - 6x - 4, & x > 4 \end{cases}$$
 (stetig)

#### Zwischenwertsatz

Sei f(x) auf dem Intervall [a, b] stetig mit  $f(a) < y_0$  und  $f(b) > y_0$ .

Dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , sodass gilt:

$$f(c) = y_0$$

Der Satz gilt auch für  $f(a) > y_0$  und  $f(b) < y_0$ .

#### Nullstellensatz

Sei f(x) auf dem Intervall [a, b] stetig mit f(a) < 0 und f(b) > 0.

Dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , sodass gilt:

$$f(c) = 0$$

Der Satz gilt auch für f(a) > 0 und f(b) < 0.

# 2. Differentialrechnung

2.1 Mittlere und lokale Änderungsrate

H. Wuschke

30. August 2021

## Ziele der Sitzung

- mittlere Änderungsraten beschreiben und berechnen können
- lokale Änderungsrate beschreiben
- Begriffe Differenzenquotient, Differentialquotient und Anstieg erklären können

#### A2 Huschke-Äffchen

Die besonders paarungsfreudigen Huschke-Äffchen erweitern seit einigen Jahren ihren Stamm. Mit 6 Jahren ist diese seltene Affenart aus dem Kulturreservat große Friedländer Wiese bereits geschlechtsreif und die Schwangerschaft selbst dauert lediglich 5 Monate. Die Primatologin Ursula von Auwald (von ihren Freunden *Uschi* genannt) hat die Bestände dieser possierlichen Tierchen seit 1990 erfasst:

Jahr	1990	1992	1995	2000	2008	2012	2016	2019
Anzahl	66	80	104	134	168	170	158	137

- a) Stellen Sie die Populationsentwicklung grafisch dar.
- b) Berechnen Sie das Populationswachstum der einzelnen Zeiträume.
- c) Der Friedländer Landbote berichtet: "Die Huschke-Äffchen sind nachweislich seit 2008 höchst bedroht." Nehmen Sie dazu Stellung.

## Lösung A2b)

Jahr	1990	1992	1995	2000	2008	2012	2016	2019
Anzahl	66	80	104	134	168	170	158	137

b) Der Zuwachs/Nachlass der Äffchen muss ins Verhältnis zu den Jahren gesetzt werden.

[1990;1992]: 
$$\frac{80-66}{1992-1990} = \frac{14}{2} = 7$$
 [1992;1995]:  $\frac{104-80}{1995-1992} = 8$ 

[1995;2000]: 
$$\frac{134-104}{2000-1995} = 6$$
 [2000;2008]:  $\frac{168-134}{2008-2000} = 4,25$ 

[2008;2012]: 
$$\frac{170-168}{2012-2008} = \frac{1}{2}$$
 [2012;2016]:  $\frac{158-170}{2016-2012} = -3$ 

[2016;2019]: 
$$\frac{137-158}{2019-2016} = -7$$

# Lösung A2c)

Jahr	1990	1992	1995	2000	2008	2012	2016	2019
Anzahl	66	80	104	134	168	170	158	137

c) Im Zeitraum von 2008 bis 2012 lässt sich noch eine leichte Zunahme nachweisen, auch wenn diese nicht sehr stark ist. Danach nimmt die Äffchenpopulation ab, allerdings nicht extrem stärker als sie zugenommen hat, das Wort "höchst" ist nicht angebracht.

Vgl. 
$$[1990;2008] \approx 5,67$$
  $[2008;2019] \approx -2,82$ 

## mittlere Änderungsrate – Differenzenquotient

Der Differenzenquotient  $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$  wird auch als mittlere Änderungsrate bezeichnet.

Bei einer Funktion f(x) berechnet man dies auch durch  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ .

#### Bemerkung

Die mittlere Änderungsrate beschreibt eine durchschnittliche Veränderung in verschiedenen Situationen, z.B. das durchschnittliche Wachstum, die Durchschnittsgeschwindigkeit, ...

#### A3 Anfahrt Transporter

Die Fahrt eines Transporters kann die ersten 20 Sekunden mit folgender Funktion beschrieben werden:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1,6263}{2} \cdot t^2, & 0 \le t \le 17\\ 27,778 \cdot t - 237,226, & 17 < t \le 20 \end{cases}$$

Dabei wird t in Sekunden angegeben und s(t) in Metern.

- a) Geben sie an, welcher Weg nach 1 s, 5 s, 10 s, 15 s, 17 s und 20 s zurückgelegt wird.
- b) Beschreiben Sie die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den Intervallen [0;20], [1;20], [5;20], [10;20], [15;20] und [17;20] in  $\frac{km}{h}$ .
- c) Nach 17 s wird eine Momentangeschwindigkeit von ca. 100  $\frac{km}{h}$  erreicht. Anschließend fährt der Transporter konstant 100  $\frac{km}{h}$ . Weisen Sie dies nach.
- d) Ermitteln Sie die Momentangeschwindigkeit bei 10 s.

## A3 Anfahrt Transporter



## Lösung A3a)

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1,6263}{2} \cdot t^2, & 0 \le t \le 17\\ 27,778 \cdot t - 237,226, & 17 < t \le 20 \end{cases}$$

$$s(1) = \frac{1,6263}{2} \cdot 1^2 \approx 0,81 \ m;$$

$$s(5) = \frac{1,6263}{2} \cdot 5^2 \approx 20,33 m;$$

$$s(10) = \frac{1,6263}{2} \cdot 10^2 \approx 81,32 m;$$

$$s(15) = \frac{1,6263}{2} \cdot 15^2 \approx 182,96 m;$$

$$s(17) = \frac{1,6263}{2} \cdot 17^2 = 235 m;$$

$$s(20) = 27,778 \cdot 20 - 237,226 = 318,334 m$$

## Lösung A3b)

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1,6263}{2} \cdot t^2, & 0 \le t \le 17\\ 27,778 \cdot t - 237,226, & 17 < t \le 20 \end{cases}$$

$$s(0) = 0;$$
  $s(1) \approx 0.81 \text{ m};$   $s(5) \approx 20.33 \text{ m};$   $s(10) \approx 81.32 \text{ m};$ 

$$s(15) \approx 182,96 \text{ m}; \quad s(17) = 235 \text{ m}; \quad s(20) = 318,334 \text{ m}$$

$$[0;20] = \frac{318,334-0}{20-0} \approx 15,92\frac{m}{s} \stackrel{\cdot 3,6}{\approx} 57,3\frac{km}{h}$$

$$[1;20] = \frac{318,334-0,81}{20-1} \approx 16,71 \frac{m}{s} \stackrel{\cdot 3,6}{\approx} 60,2 \frac{km}{h}$$

$$[5;20] = \frac{318,334-20,33}{20-5} \approx 19,87 \frac{m}{s} \stackrel{\cdot 3,6}{\approx} 71,5 \frac{km}{h}$$

$$[10;20] = \frac{318,334-81,32}{20-10} \approx 23,70 \frac{m}{s} \stackrel{\cdot 3,6}{\approx} 85,3 \frac{km}{h}$$

$$[15;20] = \dots \stackrel{\cdot 3,6}{\approx} 97,5 \frac{km}{h}$$
  $[17;20] = \dots \stackrel{\cdot 3,6}{\approx} 100 \frac{km}{h}$ 

## Lösung A3c)

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1,6263}{2} \cdot t^2, & 0 \le t \le 17\\ \frac{27,778}{2} \cdot t - 237,226, & 17 < t \le 20 \end{cases}$$

Es gilt für [17;20] die mittlere Änderungsrate  $\frac{318,334-235}{20-17} = 27,778$ .

Dies ist der Anstieg der linearen Funktion s(t) für  $17 < t \le 20$ .

Bei linearen Funktionen wird der Anstieg m durch den Differenzenquotient gebildet.

## Lösung A3d)

$$s(t) = \frac{1,6263}{2} \cdot t^2, 0 \le t \le 17$$

Für die Momentangeschwindigkeit muss das Intervall möglichst um die 10 herum verkleinert werden.

$$[9;10] = \frac{s(10) - s(9)}{10 - 9} \approx 15,4499 \frac{m}{s}$$

$$[9,9;10] = \frac{s(10) - s(9,9)}{10 - 9,9} \approx 16,1817 \frac{m}{s}$$

$$[9,99;10] = \frac{s(10) - s(9,99)}{10 - 9,99} \approx 16,249 \frac{m}{s}$$

$$[9,999;10] = \frac{s(10) - s(9,999)}{10 - 9,999} \approx 16,2622 \frac{m}{s}$$

$$[9,9999;10] = \frac{s(10) - s(9,9999)}{10 - 9,9999} \approx 16,2629 \frac{m}{s}$$

$$\lim_{x \to 10} \frac{s(10) - s(x)}{10 - x} = \lim_{x \to 10} \frac{s(x) - s(10)}{x - 10} = 16,263 \frac{m}{s}$$

## lokale Änderungsrate – Differentialquotient – Ableitung – Anstieg in $x_0$

Der Differentialquotient einer Funktion f(x) wird auch als lokale Änderungsrate oder Ableitung an der Stelle  $x_0$  bezeichnet.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Er gibt den Anstieg der Tangente an f(x) in der Stelle  $x_0$  an.

#### Bemerkung

Die Begriffe Differentialquotient in  $x_0$ , lokale Änderungsrate in  $x_0$ , Ableitung in  $x_0$  und Anstieg der Tangente in  $x_0$  sind synonym.

# Die Entdeckung der Ableitung – ein Prioritätsstreit

Sir Isaac Newton (1642/43–1726/27)

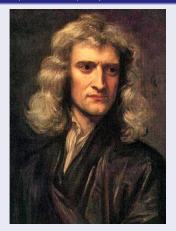


Abbildung: CC0

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)



Abbildung: CC0

# 2. Differentialrechnung

## 2.2 Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln

H. Wuschke

09. September 2021

## Ziele der Sitzung

- Begriff Ableitungsfunktion beschreiben können
- Den Differentialquotienten nutzen, um Ableitungsfunktionen herzuleiten
- Ableitungsregeln üben

## lokale Änderungsrate – Differentialquotient – Ableitung – Anstieg in $x_0$

Der Differentialquotient einer Funktion f(x) wird auch als lokale Änderungsrate oder Ableitung an der Stelle  $x_0$  bezeichnet.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Er gibt den Anstieg der Tangente an f(x) in der Stelle  $x_0$  an.

#### Bemerkung

Die Begriffe Differentialquotient in  $x_0$ , lokale Änderungsrate in  $x_0$ , Ableitung in  $x_0$  und Anstieg der Tangente in  $x_0$  sind synonym.

#### Bemerkung Notation des Differentialquotient

Aus der mittleren Änderungsrate

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

wird durch die infinitesimale Annäherung der Differentialquotient.

Um den Unterschied der Differenzen besser beschreiben zu können schreibt man statt  $\Delta$  ein d. Somit ist die Schreibweise:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

Der Nenner gibt dabei an, nach welcher Variable die Funktion abgeleitet wird.

## Ableitungsfunktion

Die Funktion f'(x) gibt alle Anstiege der Funktion f(x) an und heißt **Ableitungsfunktion**.

#### Ableitungsfunktion bestimmen

Gesucht ist die Ableitungsfunktion von  $f(x) = 3x^2$ .

Mithilfe des Differentialquotienten können die Anstiege an verschiedenen Stellen  $x_0$  gebildet werden.

Vermutung: f'(x) = 6x

## Aufgabe Ableitungsfunktion

Stellen Sie Vermutungen über die Ableitungsfunktionen der gegebenen Funktionen an:

- $g(x) = x^2$
- $h(x) = x^3$
- $k(x) = x^4$
- $m(x) = 2x^2$
- $n(x) = \frac{1}{3}x^3$
- $p(x) = \frac{1}{8}x^4$

## Funktionswerte - Hilfestellung

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$x^3$	-27	-8	-1	0	1	8	27

## Ableitungensregel Herleitung

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

$$h'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{h(x+k) - h(x)}{k} = \dots = 3x^2$$

$$k'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \dots = 4x^3$$

## Ableitungsregel für Potenzfunktionen (Potenzregel)

Für Potenzfunktionen  $f(x) = x^p$  gilt:

$$f'(x) = p \cdot x^{p-1}$$

## Bemerkung zum Beweis der Potenzregel

Für den Beweis der Potenzregel für natürliche Exponenten wird der Binomische Lehrsatz genutzt. Dieser besagt, dass für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k = x^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k\right) + y^n$$

Der Binomialkoeffizient ist folgendermaßen definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \qquad 0! := 1$$

Dann gilt für  $f(x) = x^n$ :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\cdots=n\cdot x^{n-1}$$

### Ableitungsbeispiele

$$\frac{d}{dx}\left(4 \cdot x^{12}\right) = 4 \cdot 12 \cdot x^{12-1} = 48 \cdot x^{11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^6}\right) = \frac{d}{dt}\left(1 \cdot t^{-6}\right) = 1 \cdot (-6) \cdot t^{-6-1} = -6 \cdot t^{-7} = -\frac{6}{t^7}$$

$$\frac{d}{dr}\left(-\frac{5}{r^7}\right) = \frac{d}{dr}\left(-5 \cdot r^{-7}\right) = -5 \cdot (-7) \cdot r^{-7-1} = 35 \cdot r^{-8} = \frac{35}{r^8}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[7]{x^9}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{9}{7}}\right) = \frac{9}{7} \cdot x^{\frac{9}{7} - 1} = \frac{9}{7} \cdot x^{\frac{2}{7}} = \frac{9}{7} \cdot \sqrt[7]{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \sqrt[5]{x^3} \right) = \frac{d}{dx} \left( x^{\frac{3}{5}} \right) = \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{3}{5} - 1} = \frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$$

## Ableitungensregel Herleitung

$$m'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot (x+h)^2 - 2 \cdot x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4hx + 2h^2 - 2x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4x + 2h = 4x$$

$$n'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{3}(x+h)^3 - \frac{1}{3}x^3}{h} = \dots = x^2$$

$$p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{8}(x+h)^4 - \frac{1}{8}x^4}{h} = \dots = \frac{1}{2} \cdot x^3$$

## Ableitungsregel für Funktionen mit konstantem Faktor (Faktorregel)

Für Potenzfunktionen  $f(x) = k \cdot g(x)$  gilt:

$$f'(x) = k \cdot g'(x)$$



### Ableitung von konstanten Funktionen

Für eine konstante Funktion  $f(x) = a \ (a \in \mathbb{R})$  gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

### Ableitung eines konstanten Summanden (Konstantenregel)

Für konstante Funktionen f(x) = a gilt:

$$f'(x) = 0$$

### Beispiele

$$\frac{d}{dx}15 = 0$$

$$\frac{d}{ds}3s = 0$$

$$\frac{d}{dt}(4x-13)=0$$

## Ableitung von Summen von Funktionen

Leiten Sie die folgenden Funktionen mithilfe des CAS ab. Beschreiben Sie ihre Feststellung.

- $f(x) = x^3 + x^2$
- $g(x) = 2x^2 + 3x$
- $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4$
- $k(x) = 7x^2 3x + 15$
- $m(x) = 12x \frac{\pi}{2}$

## Ableitung von addierten Funktionen (Summenregel)

Für eine Funktion f(x) = g(x) + h(x) gilt:

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

### Herleitung Summenregel

Für f(x) = g(x) + h(x) ist die Ableitungsfunktion f'(x)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) + h(x+h) - (g(x) + h(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = g'(x) + h'(x)$$

### Ableitung spezieller Funktionen

$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$$
  $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$   $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$ 

### Anstiege berechnen

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 18,328$ .

a) Berechnen Sie den Anstieg an der Stellen  $x_1=-2$  und  $x_2=1$ .

Schritt 1: Funktion ableiten, weil die Ableitungsfunktion ist eine Funktion, welche die Anstiege der Funktion an den entsprechenden Stellen angibt.

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 5$$

**Schritt 2:** Die Stellen in die Ableitung einsetzen, um die Anstiege dort zu bestimmen.

$$f'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) + 5 = 45$$

 $\rightarrow$  der Anstieg bei  $x_1 = -2$  ist 45.

$$f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 5 = 3$$

 $\rightarrow$  der Anstieg bei  $x_2 = 1$  ist 3.



## Stellen der Anstiege berechnen

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 18,328$ .

- b) Bestimmen Sie die Stellen, an welchen der Anstieg m=3 ist.
- **Schritt 1:** Funktion ableiten, weil die Ableitungsfunktion ist eine Funktion, welche die Anstiege der Funktion an den entsprechenden Stellen angibt.

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 5$$

Schritt 2: Den Anstieg mit der Ableitungsfunktion gleich setzen und lösen.

$$f'(x) =$$
3  $\Leftrightarrow 6x^2 - 8x + 5 =$ 3 Lösen  $\stackrel{\text{mit CAS}}{\Leftrightarrow}$   $x_1 = \frac{1}{3}$ ;  $x_2 = 1$ 

An den Stellen  $x_1 = \frac{1}{3}$  und  $x_2 = 1$  ist der Anstieg 3.

## Bedeutung der Anstiege

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = 5x^2 - 3$  an der Stelle x = -4 monoton fällt und an der Stelle x = 2 monoton steigt.

**Schritt 1:** Funktion ableiten, weil die Ableitungsfunktion ist eine Funktion, welche die Anstiege der Funktion an den entsprechenden Stellen angibt.

$$f'(x) = 10x$$

**Schritt 2:** Die Stellen in die Ableitung einsetzen, um die Anstiege dort zu bestimmen.

 $f'(-4) = 10 \cdot (-4) = -40 < 0$  also fällt die Funktion monoton an der Stelle x = -4.

 $f'(2) = 10 \cdot (2) = 20 > 0$  also fällt die Funktion monoton an der Stelle x = 2.

### Anstiegswinkel berechnen

Bestimmen Sie den Anstiegswinkel der Funktion

$$g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$$
 an der Stelle  $x = 1$ 

**Schritt 1:** Funktion ableiten, weil die Ableitungsfunktion ist eine Funktion, welche die Anstiege der Funktion an den entsprechenden Stellen angibt.

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 7$$

**Schritt 2:** Die Stelle in die Ableitung einsetzen, um den Anstieg dort zu bestimmen.

$$f'(1) = 6 \cdot (1)^2 - 10 \cdot 1 + 7 = 3$$
 also ist 7 der Anstieg an der Stelle  $x = 1$ .

**Schritt 3**: Die Formel  $m = tan(\alpha)$  nutzen.

$$7 = \tan(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(7) \Leftrightarrow \alpha \approx 81,9^{\circ}$$

# 2. Differentialrechnung

2.3 Produkt- und Kettenregel

H. Wuschke

15. September 2021

### Einstiegsbeispiel 1

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^2 \cdot e^x$ .

Dann ist  $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$ 

Gegeben ist die Funktion  $g(x) = 3x^3 \cdot \sin(x)$ .

Dann ist  $g'(x) = 9x^2 \cdot \sin(x) + 3x^3 \cdot \cos(x)$ 

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion und ihrer Ableitung.

## Produktregel

Seien u(x) und v(x) zwei differenzierbare Funktionen. So gilt:

$$\frac{d}{dx}(u(x)\cdot v(x))=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

### Kurznotation der Produktregel

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

### Aufgabe A1

Bilden die erste, zweite und dritte Ableitung der gegebenen Funktionen:

$$h(x) = (x^3 - 2x) \cdot e^x$$

$$k(x) = \sin(x) \cdot \sin(x) = (\sin(x))^2$$

## Verkettung zweier Funktionen

Seien  $f: D_f \to W_f$  und  $g: D_g \to W_g$  zwei beliebige Funktionen. So ist die **Verkettung** bzw. Komposition definiert als:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

und

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

Dabei ist  $g \circ f: D_{f|g} \to W_{g(f)}$  und  $f \circ g: D_{g|f} \to W_{f(g)}$ 

### Bemerkung zum Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \ln(x)$$
 dort ist  $D_f = (0; \infty)$  und  $W_f = \mathbb{R}$ 

$$g(x) = x^2 - 1$$
 dort ist  $D_g = \mathbb{R}$  und  $W_g = [-1; \infty]$ 

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln(x)) = (\ln(x))^2 - 1$$

Es gilt:  $g \circ f : (0, \infty) \to (-1, \infty)$ 

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \ln(x^2 - 1)$$

Es gilt:  $f \circ g : \mathbb{R} \setminus [-1;1] \to \mathbb{R}$ 

## Aufgabe A2

Bilden Sie  $(g \circ f)(x)$  und  $(f \circ g)(x)$  für die gegebenen Funktionen:

- a)  $f(x) = x^2 3x + 5$  und  $g(x) = \sqrt{x-2}$
- b)  $f(x) = e^x \text{ und } g(x) = 3x^2 5x$

## Aufgabe A3

Beschreiben Sie die Funktionen, aus denen die Komposition besteht.

- a)  $f(x) = \sin(3(x-2))$
- b)  $g(t) = e^{3t-1}$
- c)  $h(z) = (3z 4)^{43}$
- d)  $k(x) = e^{\sin(x^2+2)}$

## Einstiegsbeispiel 2

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = (x^3 - 2x)^5$ . Dann ist  $f'(x) = 5 \cdot (x^3 - 2x)^4 \cdot (3x^2 - 2)$ 

Gegeben ist die Funktion  $g(x) = \cos(3x^2 - 4x)$ . Dann ist  $g'(x) = (6x - 4) \cdot (-\sin(3x^2 - 4x))$ 

Gegeben ist die Funktion  $h(x) = e^{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$ . Dann ist  $h'(x) = (2a \cdot x + b) \cdot e^{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$ .

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion und ihrer Ableitung.

#### Kettenregel

Seien f(x) und g(x) zwei differenzierbare Funktionen. So ist auch die Verkettung der Funktionen g(f(x)) differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(g(f(x))\right) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

### Mündliche Beschreibung der Kettenregel

Besteht eine Funktion aus einer äußeren und einer inneren Funktionen, so gilt für die Ableitung:

(innere Funktion abgeleitet) · (äußere Funktion abgeleitet)

### Aufgabe A4

Bilden die erste und zweite Ableitung der gegebenen Funktionen:

$$h(x) = (x^4 - 3x^2 + 5)^6$$

$$k(x) = \sin(e^x)$$

## Ableitung von ln(x)

Es gilt:  $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$ 

Beweis:

$$e^{\ln(x)} = x$$

Nach Kettenregel ist also die Ableitung

$$(\ln(x))' \cdot e^{\ln(x)} = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

### Ableitung von $a^x$

Es gilt:  $\frac{d}{dx}(a^x) = \ln(a) \cdot a^x$ 

Beweis:

$$a^{x} = e^{\ln(a^{x})} = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Nach Kettenregel ist also die Ableitung

$$\ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$$

### Quotientenregel

Aus der Ketten- und Produktregel kann man auch die Quotientenregel herleiten. Hier gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

## Beispiel

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$u(x) = \sin(x) \text{ und } u'(x) = \cos(x) \text{ bzw. } v(x) = x^2 \text{ und } v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{2 \cdot \sin(x)}{x^3}$$

# 2. Differentialrechnung

2.4 Tangenten und Normalen

H. Wuschke

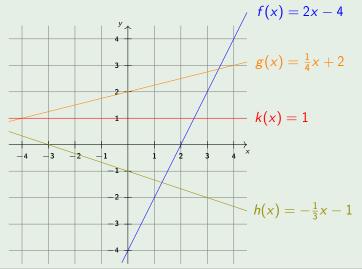
16. September 2021

## Ziele der Sitzung

- Wiederholung von linearen Funktionen  $y = m \cdot x + n$
- Veränderung des Begriffes Tangente
- Aufstellung von verschiedenen Geraden-, Tangenten- oder Normalengleichungen an Funktionen
- Berechnen von Anstiegswinkeln

## Aufgabe A1 ohne CAS

Begründen Sie die Gleichungen der gegebenen linearen Funktionen.



#### lineare Funktion

Eine Funktion  $f(x) = m \cdot x + n$  heißt lineare Funktion.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
 ... **Anstieg** der Funktion

n = f(0) ... Verschiebung an der y-Achse.

### Bemerkung

Eine lineare Funktion ist eindeutig bestimmt durch:

- Zwei Punkte
- Anstieg und einen Punkt

## Passante, Sekante, Tangente

Geraden werden in Abhängigkeit von ihrer Berührung mit anderen Objekten bezeichnet:

Passante (lat. passare=vorbeigehen): keine Berührung

Tangente (lat. tangere=berühren): 1 Berührungspunkt

Sekante (lat. secare=schneiden): schneidet in 2 Punkten

## Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = (x-3)^2 - 4$ . Bestimmen Sie die Geradengleichung zwischen den Punkten.

- a) A(1|2) und B(3|f(3)) b) C(-2|f(-2)) und A
- c) D(1|f(1)) und E(7|f(7))

### Anstieg in $x_0$

Die **Ableitung** an der Stelle  $x_0$  beschreibt den **Anstieg**  $m_T$  der Tangente an genau dieser Stelle.

$$f'(x_0) = m_T$$

## Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ . Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der gegebenen Stelle  $x_0$ .

- a)  $x_0 = 0$  (Anstieg im Ursprung)
- b)  $x_0 = 2$
- c)  $x_0 = -3$
- d)  $x_0 = \frac{1}{2}$

### Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ .

Bestimmen Sie die Stellen, an welchen die Tangente ....

- a) ... den Anstieg m=1 hat.
- b) ... keinen Anstieg hat.
- c) ... parallel zur Geraden y = -2x + 5 ist.
- d) ... den Anstiegswinkel 45° hat.

## Anstiegswinkel

Jede Gerade mit Anstieg m hat einen Anstiegswinkel  $\alpha$ . Dabei gilt:

$$m = tan(\alpha)$$

Für den Anstieg einer Funktion f(x) an einer Stelle  $x_0$  gilt:

$$f'(x_0) = m = \tan(\alpha)$$

#### Normale

Die Gerade, welche an der Stelle  $x_0$  senkrecht zur Tangente verläuft heißt Normale. Für ihren Anstieg  $m_N$  gilt:

$$m_{\mathcal{N}} = -rac{1}{m_{\mathcal{T}}}$$

## Aufgabe A5 ohne CAS

Gegeben ist ein Anstieg einer Tangente  $m_T$ .

Geben Sie den Anstieg der Normalen an.

- a)  $m_T = 2$  b)  $m_T = \frac{2}{5}$  c)  $m_T = -4$  d)  $m_T = -0.8$

- e)  $m_T = 1$  f)  $m_T = 1, 2$  g)  $m_T = -12$  h)  $m_T = 0$

## Aufgaben A6

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$ Bestimmen Sie, die Gleichung der Tangente und Normale sowie den Anstiegswinkel beider Geraden in  $x_0$ .

- a)  $x_0 = 0$
- b)  $x_0 = 2$
- c)  $x_0 = \frac{4}{3}$

## Kugelstoß

Der Graph einer abgestoßenen Kugel verläuft auf dem Graphen der folgenden Funktion:

$$k(x) = -0.04x^2 + 0.54x + 1.6$$

Dabei sind x und y in Meter gegeben.

- a) Schätzen Sie die Körpergröße der Person ein, unter der Annahme, dass die Kugel auf Schulterhöhe abgestoßen wird.
- b) Berechnen Sie, wie weit die Kugel fliegt.
- c) Begründen Sie, ob die Kugel nach einer bestimmten Distanz 2,20 m hoch fliegt.
- d) Ein idealer Abstoßwinkel ist nach Erfahrungswerten 45°. Beurteilen Sie den Wurf.

# 2. Differentialrechnung

2.5 Monotonie und lokale Extrema

H. Wuschke

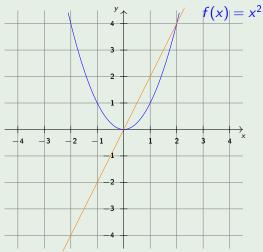
23. September 2021

### Ziele der Sitzung

- Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung herstellen
- lokale Extrema berechnen können
- Art des Extremums klassifizieren

## Aufgabe A1 ohne CAS

Beschreiben Sie die Monotonie von  $f(x) = x^2$  mithilfe der Ableitungsfunktion.



#### Monotonie einer Funktion

Seien  $x_1 < x_2$  zwei beliebige Stellen. Eine Funktion f(x) heißt:

- monoton steigend, falls gilt:  $f(x_1) \le f(x_2)$
- streng monoton steigend, falls gilt:  $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend, falls gilt:  $f(x_1) \ge f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls gilt:  $f(x_1) > f(x_2)$

#### Monotoniesatz

Sei f(x) eine differenzierbare Funktion. Wenn

- f'(x) > 0 ist, dann ist f(x) streng monoton steigend.
- f'(x) < 0 ist, dann ist f(x) streng monoton fallend.

### Umkehrung des Monotoniesatzes

Die Umkehrung gilt nicht! Beispiel:  $f(x) = x^3$ .

## Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = -\frac{15}{16}x^5 + \frac{25}{4}x^3$ 

- a) Wählen Sie drei beliebige Stellen aus und beschreiben Sie die Monotonie an diesen Stellen.
- b) Begründen Sie, dass f(x) an der Stelle x = -2 die Monotonie verändert.
- c) Zeigen Sie, dass f(x) an der Stelle x=2 einen Hochpunkt besitzt.
- d) Begründen Sie, dass sich die Monotonie von f(x) an der Stelle x = 0 nicht verändert.

#### Lokales Extremum

Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion f(x) an der Stelle  $x_E$  ein lokales Extremum besitzt, dann ist:

$$f'(x_E) = 0$$
 (notwendige Bedingung)

Hat f'(x) an der Stelle  $x_E$  einen Vorzeichenwechsel von + zu -, so handelt es sich um einen lokalen **Hochpunkt**/ein lokales **Maximum**.

Hat f'(x) an der Stelle  $x_E$  einen Vorzeichenwechsel von -zu +, so handelt es sich um einen lokalen **Tiefpunkt**/ein lokales **Minimum**.

## Sattelpunkt

Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion f(x) an der Stelle  $x_S$  einen **Sattelpunkt** oder einen lokalen Terassenpunkt besitzt, dann ist  $f'(x_S) = 0$  und f'(x) hat dort keinen Vorzeichenwechsel.

#### Satz von Rolle

Sei  $f:[a;b] \to \mathbb{R}$  eine stetige, Funktion, die differenzierbar auf dem Intervall (a;b) ist und gelte

$$f(a) = f(b)$$

dann gibt es ein  $x_0 \in (a; b)$ , für welches gilt:

$$f'(x_0)=0$$

## Aufgabe A3

Bestimmen Sie die Koordinaten und Art der Extrempunkte der gegebenen Funktionen:

- a)  $a(x) = \frac{1}{9}x^3 3x$
- b)  $b(x) = 4x^3 6x^2 + 9x$
- c)  $c(x) = x^4$
- d)  $d(x) = e^x \cdot (x-2)^2$
- e)  $e(x) = x^4 + x^3$

## Aufgabe A3 (Variante 1)

Lösungvariante 1 – mit Vorzeichenwechsel

$$a(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$$

## Schritt 1: Ableitung bilden

$$a'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$$

## Schritt 2: 1. Ableitung mit Null gleichsetzen

$$0 = \frac{1}{3}x^2 - 3$$
  $\Leftrightarrow$   $9 = x^2$   $\Leftrightarrow$   $x_1 = -3$  und  $x_2 = 3$ 

## <u>Schritt 3:</u> Vorzeichenwechsel der Ableitung betrachten

 $a'(-3,1)\approx 0.2$  und  $a'(-2,9)\approx -0,2\to$  an der Stelle x=-3 liegt ein Hochpunkt vor, da a(x) von monoton steigend in monoton fallend übergeht.

 $a'(2,9) \approx -0,2$  und  $a'(3,1) \approx 0,2 \rightarrow$  an der Stelle x=3 liegt ein Tiefpunkt vor, da a(x) von monoton fallend in monoton steigend übergeht.

### Schritt 4: Koordinaten der Extrema bestimmen

$$a(-3) = 6 \rightarrow H(-3|6)$$
  $a(3) = -6 \rightarrow T(3|-6)$ 

#### Globales Extremum

Sei  $f: D \to \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion.

Falls es einen Punkt  $H(x_H|y_H)$  gibt mit  $f(x) \leq y_H$  für alle  $x \in D$  gibt, so wird dieser als globales Maximum bezeichnet.

Falls es einen Punkt  $T(x_T|y_T)$  gibt mit  $y_T \le f(x)$  für alle  $x \in D$  gibt, so wird dieser als globales Minimum bezeichnet.

#### Satz vom Minimum und Maximum

Jede stetige Funktion  $f:[a;b]\to\mathbb{R}$  ist beschränkt und nimmt ein Minimum und ein Maximum an.

#### Randextrema

Bei Funktionen  $f:[a;b] \to \mathbb{R}$  können die globalen Extrema auch an den Rändern a und b sein.

#### Hinreichendes Kriterium lokaler Extremstellen

Für eine Funktion f(x) und ihre Ableitungen f'(x) und f''(x) gilt:

Wenn  $f'(x_E) = 0$  und gleichzeitig  $f''(x_E) < 0$  ist, dann hat der Graph von f(x) an der Stelle  $x_E$  ein lokales Maximum.

Wenn  $f'(x_E) = 0$  und gleichzeitig  $f''(x_E) > 0$  ist, dann hat der Graph von f(x) an der Stelle  $x_E$  ein lokales Minimum.

# Aufgabe A4

Bearbeiten Sie Aufgabe A3 mithilfe dieses hinreichenden Kriteriums.

#### Bemerkung zur Bestimmung des Art des Extremums

Der Vorzeichenwechsel der Ableitung funktioniert immer.

Das hinreichende Kriterium mit der zweiten Ableitung funktioniert nicht immer.

Beispiel: 
$$f(x) = x^4$$

# Aufgabe A4 (Variante 2)

Lösungvariante 2 – mit zweiter Ableitung

$$a(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$$

# Schritt 1: Ableitungen bilden

$$a'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$$
  $a''(x) = \frac{2}{3}x$ 

$$a''(x) = \frac{2}{3}x$$

# Schritt 2: 1. Ableitung mit Null gleichsetzen

$$0 = \frac{1}{3}x^2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 3$$

# Schritt 3: 2. Ableitung zur Überprüfung nutzen

$$a''(-3) = -2 < 0 \rightarrow \mathsf{bei}\ x = -3$$
 liegt ein Hochpunkt vor

$$a''(3) = 2 > 0 \rightarrow \text{bei } x = 3 \text{ liegt ein Tiefpunkt vor}$$

#### Schritt 4: Koordinaten der Extrema bestimmen

$$a(-3) = 6 \rightarrow H(-3|6)$$

$$a(3) = -6 \rightarrow T(3|-6)$$

# 2. Differentialrechnung

2.6 Krümmungsverhalten und lokale Wendepunkte

H. Wuschke

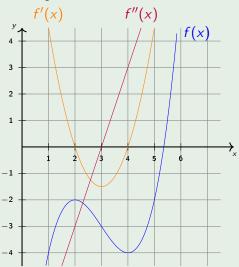
29. September 2019

## Ziele der Sitzung

- Wendepunkte berechnen können
- Links- und Rechtskrümmung von Funktionen beschreiben
- Begriffe konvex und konkav kennen
- Funktionsgleichung, 1. Ableitung, 2. Ableitung und 3.
   Ableitung korrekt verwenden

# Aufgabe A1 ohne CAS

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion und ihren beiden Ableitungen.



### Wendepunkt einer Funktion

Sei f(x) eine differenzierbare Funktion.

Die Stelle, an der f'(x) einen Extrempunkt besitzt, heißt Wendestelle  $x_W$ . Setzt man diese Stelle in die Funktionsgleichung ein, erhält man den Wendepunkt von f(x). Deshalb gilt:

$$f''(x_W) = 0 \qquad f'''(x_W) \neq 0$$

#### Eigenschaften der Wendepunktes

- Am Wendepunkt hat f(x) den extremsten Anstieg bzw. das extremste Gefälle.
- Am Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten der Funktion.

#### Krümmungsverhalten

Wenn f''(x) < 0 ist, heißt die Funktion rechtsgekrümmt oder konkav.

Wenn f''(x) > 0 ist, heißt die Funktion linksgekrümmt oder konvex.

#### Merkhilfen

 Merksprüche für konvex und konkav: konkav, wie ein Schaf konvex fliegt die Hex'

 Zur Entscheidung, über konvex/konkav kann man gut Smileys nutzen.

 $f''(x) < 0 \qquad \rightarrow \qquad \bigcirc \\ f''(x) > 0 \qquad \rightarrow \qquad \bigcirc$ konkay

konvex

# Aufgabe A2 ohne CAS

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12x + 1$ 

- a) Geben Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.
- b) Bestimmen den Wendepunkt der Funktion.
- c) Beschreiben Sie die Eigenschaft des berechneten Wendepunktes.
- d) Geben Sie Stellen an, an welchen f(x) konvex ist und begründen Sie ihre Auswahl.

#### Aufgabe A3

Bestimmen Sie die Extrempunkte und Wendepunkte der gegebenen Funktionen. Treffen Sie außerdem Aussagen über Monotonie und Krümmungsverhalten der Funktionen.

a) 
$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

b) 
$$h(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$$

c) 
$$k(x) = (x-2)^2 \cdot e^{-x^3+2x^2+1}$$

# Sattelpunkt

Ein **Sattelpunkt** oder lokaler **Terassenpunkt** ist ein besonderer Wendepunkt an der Stelle  $x_S$ , mit folgenden Eigenschaften:

$$f'(x_S) = 0$$
  $f''(x_S) = 0$   $f'''(x_S) \neq 0$ 

#### Aufgabe A4 ohne CAS

Skizzieren Sie den Graph einer Funktion b(x) mit den gegebenen Eigenschaften.

- a) ein Wendepunkt, ein Hochpunkt, ein Tiefpunkt
- b) Achsenschnittpunkte  $S_y(0|2)$ ,  $S_{x_1}(-2|0)$  und  $S_{x_2}(3|0)$ , zwei Tiefpunkte, ein Hochpunkt, zwei Wendepunkte
- c) zwei Wendepunkte, kein Extrempunkt
- d) ein Tiefpunkt, drei Wendepunkte, ein Hochpunkt
- e) ein Hochpunkt, zwei Wendepunkte

#### Heiße Sommerrodelbahn

Das Profil des Schicksalsbergs kann an der zu Gondor gewandten Seite etwa mit der Funktion beschrieben werden:

$$b(x) = -3,11 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 2,78 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 0,0698 \cdot x^2 + 0,04 \cdot x + 1287$$

Dabei sind x und y in Meter angegeben. Nachdem Sauron besiegt wurde, wollen die Einwohner von Minas Tirith wieder ein wenig Spaß haben und eine Sommerrodelbahn am Bergeshang errichten. Sie soll im Intervall  $0 \le x \le 320$  verlaufen.

- a) Begründen Sie, dass zu Beginn noch ein kleiner Aufstieg vorhanden ist.
- Bei einem Fall von über 53° ist die Fahrt für Menschen lebensgefährlich. Entscheiden Sie, ob die Testfahrer überleben.
- c) Am Ende der Bahn soll eine Schanze s(x) zum Sprung auf den Boden Mordors gebaut werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von s(x) unter der Bedingung, dass sie knickfrei an b(x) anschließt.

### Anschluss an den Funktionsgraphen

Sei f(x) gegeben.

Eine zweite Funktion g(x) soll an der Stelle  $x_A$  an f(x) anschließen.

Dafür muss auf jeden Fall gelten:

$$f(x_A) = g(x_A)$$

Damit der Anschluss knickfrei, ohne Knick, tangential, mit gleichem Anstieg ist, muss gelten:

$$f'(x_A) = g'(x_A)$$

Bei Gleisen und Straßen wird für hohe Geschwindigkeiten zusätzlich gefordert, dass:

$$f''(x_A) = g''(x_A)$$

# 2. Differentialrechnung

2.7 Parameterfunktionen

H. Wuschke

08. November 2021

# Ziele der Sitzung

- Anwendung des gelernten Wissens auf Parameterfunktionen
- Ortskurve von Extrem- oder Wendepunkten bestimmen

# A1 Wiederholung Ableitung

Bilden Sie die gewünschten Ableitungen

a) 
$$\frac{d}{dx} \left( 3 \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot x^2 + e^x - 3 \cdot \sin(x) \right)$$

b) 
$$\frac{d}{dt} (3 \cdot x^4 \cdot t^2 - \frac{1}{12} \cdot x^2 \cdot t + e^x - 3 \cdot \cos(t))$$

c) 
$$\frac{d}{da} (5 \cdot a^2 \cdot b^3 - 13 \cdot a^3 \cdot b^2 + 8 \cdot a \cdot b - 6 \cdot a)$$

d) 
$$\frac{d}{db} (5 \cdot a^2 \cdot b^3 - 13 \cdot a^3 \cdot b^2 + 8 \cdot a \cdot b - 6 \cdot a)$$

e) 
$$\frac{d}{dc} \left( e^{3 \cdot x + c} + \sin(7c - 6x) \right)$$

f) 
$$\frac{d}{dx} \left( e^{3 \cdot x + c} + \sin(7c - 6x) \right)$$

#### Parameterfunktion

Eine Funktion  $f_k(x)$  heißt Parameterfunktion mit der Variable x und dem Parameter k. Hierbei ist der Parameter  $k \in \mathbb{R}$  eine feste Zahl. Manchmal heißt dies auch Funktionsschar.

# Beispiel

Gegeben ist die Funktionsvorschrift  $g_t(x) = t^2 \cdot x^3 - t^4 \cdot x + 6$  $g_2(x) = 2^2 \cdot x^3 - 2^4 \cdot x + 6 = 4x^3 - 16x + 6$  $g_{-5}(x) = (-5)^2 \cdot x^3 - (-5)^4 \cdot x + 6 = 25x^3 - 625x + 6$  $g_0(x) = 0^2 \cdot x^3 - 0^4 \cdot x + 6 = 0 \cdot x^3 - 0 \cdot x + 6 = 6$  $g_1(x) = x^3 - x + 6$  und  $g_{-1}(x) = x^3 - x + 6$  $g'_t(x) = 3 \cdot t^2 \cdot x^2 - t^4$  $g_t''(x) = 6 \cdot t^2 \cdot x$  $g_t'''(x) = 6 \cdot t^2$ Jede weitere Ableitung ist natürlich 0.

#### Bemerkung

Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte sind meist auch in Abhängigkeit vom gegebenen Parameter.

#### Beispiel

$$f_a(x) = \frac{1}{2}x \cdot (a - x)^2 = \frac{1}{2} \cdot x^3 - a \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x \; ; \; a \in \mathbb{R}$$

 $f_a(x)$  besitzt offensichtlich (linke Darstellung des Funktionstermes) die Nullstellen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = a$ .

$$f'_a(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x + \frac{1}{2} \cdot a^2; \quad f''_a(x) = 3 \cdot x - 2 \cdot a; \quad f'''_a(x) = 3$$

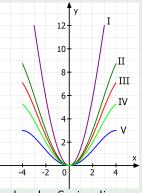
Die Extrempunkte liegen bei  $E_1\left(\frac{a}{3}\mid \frac{2\cdot a^3}{27}\right)$  und  $E_2(a|0)$ .

Der Wendepunkt liegt bei  $W\left(\frac{2 \cdot a}{3} \mid \frac{a^3}{27}\right)$ 

# A2 Abitur 2017 B1 (Teil 1)

Die Abbildung zeigt Längsschnitte von fünf Gläsern einer Glas-Serie; Füße und Stiele der Gläser sind nicht abgebildet. [...] eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit. Die Formen der Gläser sind so gewählt, dass jeder der fünf Längsschnitte modellhaft mithilfe einer der in  $\mathbb R$  definierten Funktionen  $f_k$  mit

$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2$$
 und  $k \in \mathbb{R}^+$ 



beschrieben werden kann. Dabei gehört  $f_2$  zum Likörglas der Serie, die Funktion  $f_3$  zum Cocktailglas. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm, sein Rand einen Durchmesser von 6 cm. Die Materialstärke der Gläser soll vernachlässigt werden.

a) Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu.

# A2 Abitur 2017 B1 (Teil 2)

$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2$$
 und  $k \in \mathbb{R}^+$ 

- b) Bestimmen Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k.
- c) Begründen Sie, dass der Graph von  $f_k$  für jedes  $k \in \mathbb{R}^+$  symmetrisch zur y-Achse ist.
- d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von  $f_k$ .

#### Ortskurve

Der Graph einer Funktion, auf dem alle Extrem- bzw. Wendepunkte einer Parameterfunktion liegen, heißt Ortskurve der Extrempunkte bzw. Ortskurve der Wendepunkte.

#### Bemerkung

Jeder Extrem- bzw. Wendepunkt besitzt in der Regel eine eigene Ortskurve.

# Beispiel

$$f_a(x) = \frac{1}{2}x \cdot (a - x)^2 = \frac{1}{2} \cdot x^3 - a \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x \; ; \; a \in \mathbb{R}$$

$$E_1\left(rac{a}{3}\mid rac{2\cdot a^3}{27}
ight) \quad o \quad x=rac{a}{3} \Leftrightarrow a=3\cdot x \quad o \quad y=rac{2\cdot (3x)^3}{27}=2x^3$$

$$E_2(a|0) \rightarrow x = a \text{ und } y = 0$$

$$W\left(\frac{2\cdot a}{3}\mid \frac{a^3}{27}\right) \rightarrow x = \frac{2\cdot a}{3} \Leftrightarrow a = \frac{3x}{2} \rightarrow y = \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^3}{27} = \frac{x^3}{8}$$

# 2. Differentialrechnung

2.8 Funktionsbestimmung

H. Wuschke

06. Dezember 2021

# Ziele der Sitzung

- allgemeine Funktionsgleichungen angeben
- aus gegebenen Informationen Gleichungen aufstellen
- das lineare Gleichungssystem lösen und die Funktionsgleichung bestimmen

# Aufgabe A1

Leiten Sie die gegebenen Funktionen jeweils zweimal nach x ab.

- 2  $g: x \mapsto a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- **4**  $k: x \mapsto a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$

# Aufgabe A2

Bestimmen Sie eine Funktion zweiten Grades, welche durch folgende Punkte beschrieben wird:

- $\bullet$   $P_1(-3|18), P_2(2|8), P_3(4|32)$
- $P_1(0|-3), P_2(-3|0), P_3(1|-2)$

# Funktionsbestimmung

Ziel der Funktionsbestimmung ist es, in der Regel eine ganzrationale Funktion vom Grad n zu bestimmen.

Gesucht: 
$$f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + a_{n-2} \cdot x^2 + a_{n-1} \cdot x + a_n$$

Methode: Lineares Gleichungssystem aufstellen

Die Funktionsgleichung hat n+1 unbekannte Koeffizienten, also benötigt man für eine eindeutige Lösung eines linearen Gleichungssystems n+1 unabhängige Gleichungen.

# Beispiel

Um eine Funktion zweiten Grades  $f(x) = a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2$  bestimmen zu können, werden 3 Gleichungen benötigt.

# Beispiel Funktionsgleichung aus Informationen bestimmen

Gesucht ist eine Funktion 5. Grades durch den Ursprung mit einem Hochpunkt H(1|1) und einem Sattelpunkt S(2|-3).

Gesucht: 
$$g(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$$

6 Informationen:

Punkte: g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = -3,

Extremum: g'(1) = 0, g'(2) = 0

Wendepunkt: g''(2) = 0

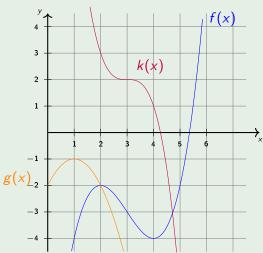
Gleichungssystem aufstellen und anschließend lösen führt zu:

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{67}{8}x^5 + 55x^4 - \frac{1.035}{8}x^3 + \frac{505}{4}x^2 - \frac{85}{2}x$$

Grafische Probe zeigt: g(x) besitzt die Eigenschaften.

# Aufgabe A3

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der dargestellten Funktionen.



# 2. Differentialrechnung

2.9 Regression

H. Wuschke

06. Januar 2022

# Ziele der Sitzung

- aus gegebenen Daten eine Funktionsvorschrift aufstellen
- Regressionsfunktionen mit unterschiedlichen Methoden aufstellen
- Bezug zwischen Regressionsfunktion und Regressionsgerade beschreiben

# Aufgabe A1

Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , die folgende Eigenschaften besitzt:

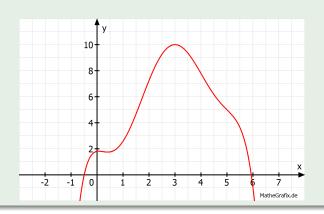
- f(x) verläuft durch den Punkt  $P(\frac{3}{4} | 2)$ .
- Im Punkt H(3|10) besitzt die Funktion f(x) ein lokales Maximum.
- Am Schnittpunkt mit der y-Achse entspricht der Anstiegswinkel von f(x) ca.  $20^{\circ}$ .
- Ab dem gemeinsamen Berührungspunkt B(5|f(5)) mit der Funktion  $g(x) = -x^2 + 8x 10$  ist f(x) konkav.

#### Aufgabe A2

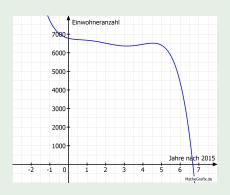
Modellieren Sie die Einwohnerzahlen von Friedland mithilfe einer Funktion ab 2015. Beurteilen Sie diese anschließend.

Jahr	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Personen	6.779	6.673	6.514	6.364	6.456	6.403

$$f(x) \approx -0.026596 \cdot x^6 + 0.438295 \cdot x^5 - 2.54064 \cdot x^4 + 5.71556 \cdot x^3$$
$$-3.17132 \cdot x^2 + 0.36397 \cdot x + 1.80423$$



$$f(x) = -\frac{791}{120} \cdot x^5 + \frac{1753}{24} \cdot x^4 - \frac{2105}{8} \cdot x^3 + \frac{8411}{24} \cdot x^2 - \frac{15587}{60} \cdot x + 6779$$



In diesem Jahr wird Friedland aussterben!

# Regression (lat. regression = das Zurückgehen)

"Die Regression gibt einen Zusammenhang zwischen zwei oder mehr Variablen an. Bei der Regressionsanalyse wird vorausgesetzt, dass es einen gerichteten linearen Zusammenhang gibt, das heißt, es existieren eine abhängige Variable und mindestens eine unabhängige Variable. Welche Variablen abhängig und welche unabhängig sind, muss aufgrund inhaltlich logischer Überlegungen identifiziert werden können. Mit Hilfe der Regressionsanalyse kann eine Regressionsfunktion errechnet werden, welche die Anhängigkeit der beiden Variablen mit einer Geraden beschreibt. Die ermittelte Regressionsgerade erlaubt es, Prognosen für die abhängige Variable zu treffen, wenn ein Wert für die unabhängige Variable eingesetzt wird. Umgekehrte Rückschlüsse sind nicht zulässig."a

<sup>&</sup>lt;sup>a</sup>Statista, zuletzt abgerufen am 04.01.2022

# Nutzen von Regression

Rencher und Schaalje beschreiben bereits in der Einführung ihres Buches *Linear Models in Statistics* (2008, S. 2f.), dass es verschiedene Gründe für Regressionsmodelle gibt:

- Prediction (Vorhersage)
- Oata Description or Explanation
- Parameter Estimation (Einschätzung)
- Variable Selection or Screening
- Control of Output

# Aufgabe A3 – Abitur 2008

Über die 8 Planeten Planeten unseres Sonnensystems sind die in der Tabelle gegebenen Daten bekannt.

Dabei ist v die Maßzahl der mittleren Bahngeschwindigkeit in km $\cdot$ s $^{-1}$  und r die Maßzahl der mittleren Entfernung von der Sonne in  $10^6$  km.

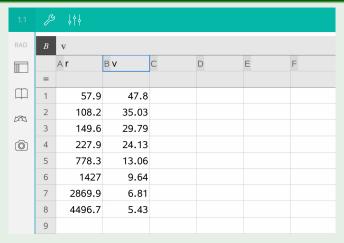
	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
r	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1427,0	2869,9	4496,7
V	47,80	35,03	29,79	24,13	13,06	9,64	6,81	5,43

Der Zusammenhang zwischen v und r kann durch Funktionen näherungsweise beschrieben werden.

Finden Sie drei Gleichungen geeigneter Funktionen, indem Sie folgende Regressionen ausführen:

- $\bullet$   $v = f_1(r)$  ...lineare Regressionsfunktion
- $v = f_2(r)$  ... exponentielle Regressionsfunktion
- 3  $v = f_3(r)$  ... Potenz- bzw. Powerregression

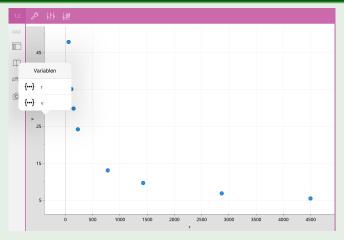
Beurteilen Sie die Funktionen hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit.



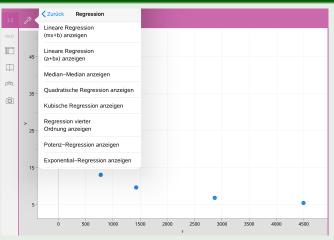
Geben Sie in Lists & Spreadsheet die Daten geordnet ein und beschriften Sie die Spalten mit einem Wort.



Fügen Sie ein Data & Statistics-Dokument hinzu.



Versehen Sie im *Data & Statistics*-Dokument die Achsen mit den Namen aus der Tabelle.



Gehen Sie auf den Schraubenschlüssel  $\to$  Analysieren  $\to$  Regression und wählen Sie die gewünschte Regressionsart aus.



Notieren Sie sich nach jeder Regression die Funktionsgleichung. Nutzen Sie die Schieberegler (Symbol neben dem Schraubenschlüssel), um verschiedene Farben zu vergeben. Dies macht die Beurteilung einfacher.

# Wissenswertes zur Regression

Der Begriff der Regression geht auf Sir Francis Galton (1822–1911) zurück, welcher mit statistischen Methoden Wegbereiter für Erkenntnisse der Genetik war.

Für den Artikel auf Wikipedia hier klicken.

Um die Punkte auf der Funktion mit den Datenpunkten ideal anzupassen bzw. die korrekten Koeffizienten zu wählen, wir die Methode der kleinsten Quadrate von den Rechnern genutzt. Diese Methode hat der kleine Carl Friedrich Gauß (1777–1855) bereits durch ihn als Zwölfjähriger auf seinem Schulweg in Braunschweig genutzt. Offiziell verwendet er dies 1801 in der Astronomie in Dokumenten.

Für den Artikel auf Wikipedia hier klicken.

# 2. Differentialrechnung 2.10 Extremwertprobleme

H. Wuschke

10. Januar 2022

# Ziele der Sitzung

- Mit Hilfe der Differentialrechnung Extremwertprobleme lösen
- Zielfunktion mithilfe gegebener Nebenbedingung aufstellen
- Planimetrische und stereometrische Formeln im Tafelwerk finden

#### Aufgabe A1

Frieda Fröhlich möchte gerne Erdmännchen züchten, da diese possierlichen Tierchen sie stets erheitern. Erdmännchen sind jedoch Wildtiere, deshalb ist es verboten, sie im Haus zu halten. Frieda kauft sich insgesamt 40 m Glasplatten (mit einer Dicke von 19 mm und einer Höhe von 1,5 m), welche das Gehege einzäunen sollen. Bevor jedoch weitere Planungsschritte erfolgen (genügend großer Sandhaufen, Bodenabdichtung, Schutzhaus mit Wärmelampe), muss die Fläche geplant werden. Frieda hat dafür zwei Optionen:

Option 1 – frei liegendes Gehege Option 2 – Gehege an einer Hauswand

Damit die agilen Erdmännchen auch genügend Auslauf haben, soll die umzäunte Fläche maximal sein.

Bestimmen Sie für beide Optionen die maximale Fläche.

# Lösungsnotizen Aufgabe A1 – Option 1

Umfang des Geheges 40 m; Flächeninhalt soll maximal werden Option 1

# **Zielfunktion**

$$A(a,b) = a \cdot b$$

$$A(a,b) = a \cdot b$$
  
 $A(b) = (20 - b) \cdot b = 20b - b^2$ 

# Nebenbedingung

$$\frac{1}{u(a,b)} = 2 \cdot (a+b)$$

$$40 = 2 \cdot (a+b)$$

$$20-b = a$$

Grafische Ermittlung des Maximums der Funktion A(b) ergibt  $H(10 \mid 100)$ . Also für b=10 m und damit auch a=10 m ist der maximale Flächeninhalt  $100 \text{ m}^2$ .

#### Aufgabe A1 - Option 2

Durch die veränderte Nebenbedingung ergibt sich auch eine andere Zielfunktion. Die Lösung ist im essentiellen: Eine Seite ist 10 m und eine Seite ist 20 m lang, daher ist der maximale Flächeninhalt 200 m<sup>2</sup>.

# Extremwertprobleme

Bei Extremwertproblemen soll ein extremer (maximaler/minimaler) Wert für eine Größe in einer Sachsituation (Zielfunktion) unter Nutzung einer Nebenbedingung bestimmt werden.

# Satz vom Maximum und Minimum (vgl. 23.09.2021)

Ist  $f:[a,b]\to\mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so gibt es stets Argumente  $x_{min},\ x_{max}\in[a,b]$  derart, dass für jedes Argument  $x\in[a,b]$  die folgende Ungeichung erfüllst ist:

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

#### Bemerkungen

- Die Zielfunktion hat mehrere Variablen und wird durch Nebenbedingungen zu einer Funktion mit einer Variablen umgeformt.
- 2 Extrema können auch am Rand (f(a) oder f(b)) sein.

# Aufgabe A2

Modellieren Sie ein Reagenzglas mithilfe einfacher Körper. Es soll ein Fassungsvermögen von 40 cm<sup>3</sup> aufweisen.

Bestimmen Sie bei welchen Abmessungen sich ein minimaler Materialverbrauch ergibt. Bewerten Sie das erhaltene Ergebnis.

# Aufgabe A3

Es einem quadratischen Stück Papier mit einer Seitenlänge von 20 cm soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu werden an allen vier Ecken gleich große Quadrate aus gespart und anschließend die vier Ränder nach oben gebogen. Berechnen Sie, für welche Höhe das Volumen dieser Schachtel maximal ist.

# Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion  $f(x)=(x-2)^2+1,5$  für  $0\leq x\leq 2$ . Von allen achsenparallelen Rechtecken mit dem Ursprung als einem Eckpunkt und dem Punkt  $P(x\mid f(x))$  als gegenüberliegendem Eckpunkt ist dasjenige mit maximalem Flächeninhalt zu bestimmen.

# Schrittfolge bei Extremwertproblemen an Funktionsgraphen

- Erstellen einer Funktionsgleichung für die zu optimierende Größe
  - a) Größen in einer Skizze festhalten
  - b) Extremalbedingung
  - c) Nebenbedingung
  - d) Zielfunktion
  - e) Definitionsbereich der Zielfunktion
- 2 Ermitteln der Extrempunkte der Zielfunktion
  - a) Graphikmodus oder Berechnung mit Ableitungen der Zielfunktion
  - b) Ränder überprüfen (Randbedingung)
- 3 Ergebnis mit allen relevanten Größen angeben und im Sachverhalt beurteilen.