Aufgaben zur Wiederholung Nullstellen (05.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE pro Funktion – ohne CAS)

Berechnen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der gegebenen quadratischen Funktionen.

$$f_1(x) = x(x+5) \qquad f_2(x) = 2x^2 - 8$$

$$f_3(x) = x^2 - x - 6 \qquad f_4(x) = (x-2)\cdot(x+3)$$

Aufgabe 2 (2 BE pro Aufgabe – ohne CAS)

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

$$a(x) = x^3 + 5x^2 \qquad b(x) = e^x \cdot (x-4)$$

$$c(x) = \sqrt{5x^2 - 10} \qquad d(x) = x^2 - 8x + 12$$

$$e(x) = 4x^2 - 8 - 4x \qquad f(x) = (x+3)^2 - 1$$

$$g(x) = \frac{x+3}{x-4} \qquad h(x) = 2\cdot 3^x - 18$$

$$i(x) = x^2 - e^2 \qquad j(x) = 7x \cdot \ln(2x+1)$$

$$k(x) = \frac{3x^2+6x}{5x^3-4} \qquad l(x) = 4xe^x - 8e^x + 4x^2e^x$$

$$m(x) = 2x^2 \cdot \sin(x) \qquad n(x) = \ln(x-3) + 1$$

$$o(x) = x^3\cos(x) + 4x^3 \qquad p(x) = (x^2+7)\cdot\ln(x)$$

$$q(x) = \sqrt{2-4x} - 2x + 1 \qquad r(x) = (x^2-9)^5$$

Aufgabe 3 (2+2 BE)

Ermitteln Sie, wie der Parameter a gewählt werden muss, damit der Graph der Funktion genau zwei Nullstellen besitzt.

$g(x) = 2x^2 + 6x + a \qquad h(x) = x^2 - ax + 4$

Aufgabe 4 (4+3 BE) – TR, kein CAS-Befehl

Gegeben ist das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 10x^2$

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Horner-Schemas $f(2)$, $f(-1)$ und $f(10)$

Aufgabe 5 (2 BE)

Von einem Polynom vierten Grades sind die Nullstellen bekannt: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$. Weiterhin gilt: $f(4) = -72$. Bestimmen Sie ausgehend von diesen Informationen die Funktionsgleichung.

Aufgaben zur Wiederholung Nullstellen (05.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE pro Funktion – ohne CAS)

Berechnen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der gegebenen quadratischen Funktionen.

$f_1(x) = x(x+5)$ $\quad x_1 = 0$ und $x_2 = -5$ $\quad S\left(-\frac{5}{2} \mid -\frac{25}{4}\right)$

$f_2(x) = 2x^2 - 8$ $\quad x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ $\quad S\left(0 \mid -8\right)$

$f_3(x) = x^2 - x - 6$ $\quad x_1 = \frac{7}{4}$ und $x_2 = -\frac{3}{4}$ $\quad S\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{25}{4}\right)$

$f_4(x) = (x-2)\cdot(x+3)$ $\quad x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ $\quad S\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{21}{4}\right)$

Aufgabe 2 (2 BE pro Aufgabe – ohne CAS)

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

$a(x) = x^3 + 5x^2$ $\quad x_{1/2} = 0;\ x_3 = -5$

$b(x) = e^x \cdot (x-4)$ $\quad x_1 = 4$

$c(x) = \sqrt{5x^2 - 10}$ $\quad x_1 = -\sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2}$

$d(x) = x^2 - 8x + 12$ $\quad x_1 = 2;\ x_2 = 6$

$e(x) = 4x^2 - 8 - 4x$ $\quad x_1 = 2;\ x_2 = -1$

$f(x) = (x+3)^2 - 1$ $\quad x_1 = -2;\ x_2 = -4$

$g(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$ $\quad x_1 = -3$

$h(x) = 2\cdot 3^x - 18$ $\quad x_1 = 2$

$i(x) = x^2 - e^2$ $\quad x_1 = -e;\ x_2 = e$

$j(x) = 7x \cdot \ln(2x+1)$ $\quad x_1 = 0$

$k(x) = \dfrac{3x^2 + 6x}{5x^3 - 4}$ $\quad x_1 = 0;\ x_2 = -2$

$l(x) = 4xe^x - 8e^x + 4x^2e^x$ $\quad x_1 = 1;\ x_2 = -2$

$m(x) = 2x^2 \cdot \sin(x)$ $\quad x_k = k\cdot\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$n(x) = \ln(x-3) + 1$ $\quad x_1 = e^{-1} + 3 = 3 + \dfrac{1}{e}$

$o(x) = x^3\cos(x) + 4x^3$ $\quad x_1 = 0$

$p(x) = (x^2+7)\cdot\ln(x)$ $\quad x = 1$

$q(x) = \sqrt{2-4x} - 2x + 1$ $\quad x_1 = -\dfrac{1}{2};\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

$r(x) = (x^2-9)^5$ $\quad x_1 = -3;\ x_2 = 3$

Aufgabe 3 (2+2 BE)

Ermitteln Sie, wie der Parameter a gewählt werden muss, damit der Graph der Funktion genau zwei Nullstellen besitzt.

$g(x) = 2x^2 + 6x + a$ $\qquad h(x) = x^2 - ax + 4$

a) $0 = x^2 + 3x + \frac{a}{2} \quad\Rightarrow\quad x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{a}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{9}{4} - \frac{a}{2} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{9}{4} > \frac{a}{2} \quad\Leftrightarrow\quad a < \frac{9}{2}$

b) $0 = x^2 - ax + 4 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 16} \quad\Rightarrow\quad \frac{a^2}{4} - 16 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2 > 64$

$\Leftrightarrow\quad a < -8$ oder $a > 8$ in Intervallschreibweise: $a \in (-\infty; -8) \cup (8; \infty)$

Aufgabe 4 (4+3 BE) – TR, kein CAS-Befehl

Gegeben ist das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 10x^2$

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen.

Es ist $p(x) = x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 10x^2 = x^2 \cdot (x^3 + 6x^2 + 3x - 10)$. Daher ist $x = 0$ eine doppelte Nullstelle. Anschließend muss eine Nullstelle geraten werden, z.B. $x = 1$ ist Nullstelle. Abspalten durch Horner-Schema:

	1	6	3	-10
		1	7	10
1	1	7	10	0

Also ist $p(x) = x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 10x^2 = x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 7x + 10)$
Die letzten beiden Nullstellen können mit p-q-Formel ermittelt werden und sind $x = 5$ und $x = 2$

b) Bestimmen Sie mithilfe des Horner-Schemas $f(2)$, $f(-1)$ und $f(10)$

	1	6	3	-10
		2	16	38
2	1	8	19	28

	1	6	3	-10
		-1	10	26
-1	1	5	13	16

	1	6	3	-10
		10	160	1630
10	1	16	163	1620

Aufgabe 5 (2 BE)

Von einem Polynom vierten Grades sind die Nullstellen bekannt: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$. Weiterhin gilt: $f(4) = -72$. Bestimmen Sie ausgehend von diesen Informationen die Funktionsgleichung.

$f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)$

$f(4) = -72 \quad \Leftrightarrow \quad -72 = a \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-1) \quad \Leftrightarrow \quad -72 = -24 \cdot a \quad \Leftrightarrow a = 3$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 3 \cdot (x + 2) \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)}} = 3x^4 - 18x^3 - 3x^2 + 90x$

Aufgaben zu Funktionentypen und Zahlenfolgen (12.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE)

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = \sqrt{e^x}$

b) $g(x) = \sqrt{\sin(x)}$

c) $h(x) = \ln(\sin(x))$

Aufgabe 2 (4 BE)

Verschieben Sie den Funktionsgraphen der gegebenen Funktionen

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$; 4 LE $\rightarrow$ 2 LE $\downarrow$

b) $g(x) = e^{4x-7} - 2$; 2 LE $\leftarrow$ 3 LE $\uparrow$

Aufgabe 3 (3 + 2 + 3 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(1|3)$, $B(2|7)$ und $C(4|6)$.

a) Bestimmen Sie die lineare Funktion $g_1(x)$, die durch A und B verlaufen sowie die lineare Funktion $g_2(x)$ durch B und C.

b) Bestimmen Sie eine quadratische Funktion. deren Graph durch die drei Punkte verläuft.

c) Untersuchen Sie, ob es auch eine trigonometrische Funktion vom Typ $a \cdot \sin(b \cdot x) + d$ gibt.

d) Untersuchen Sie weiterhin, ob es eine Exponentialfunktion $a \cdot b^x + c$ durch drei Punkte oder ob es eine Exponentialfunktion vom Typ $a \cdot e^x + c$ durch zwei Punkte gibt.

Aufgabe 4 (4 BE pro Aufgabe)

Stellen Sie die ersten 10 Folgenglieder der gegebenen Folge in einer Wertetabelle dar. Geben Sie außerdem das 20. und 100. Folgenglied an.

1. $(a_n) = (2 \cdot n^2)$
2. $(b_n) = ((-1)^n \cdot n)$
3. $(c_n) = \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n+2}\right)$
4. $(d_n) = \left(\frac{n}{2} \cdot (1 + (-1)^n)\right)$
5. $(e_n) = (|3 - n|)$
6. $(f_n) = \left(\sqrt[n]{5}\right)$

Aufgabe 5 (4 BE)

Begründen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ ist.

Aufgabe 6 (6 BE)

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen $(a_n) = (e^{-n})$ und $(b_n) = \left(\frac{1}{n} \cdot cos(n)\right)$. Stellen Sie dazu zunächst eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 7 (6 BE)

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Bestimmen Sie zu den gegebenen ε das entsprechende Folgenglied, ab dem alle weiteren in der Epsilon-Umgebung liegen.

a) $\varepsilon = \frac{1}{2}$

b) $\varepsilon = 0,02$

c) $\varepsilon = 0,0007$

Aufgabe 8 (2 BE pro Aufgabe)

Geben Sie eine Folge an, für die:

a) 5 obere Schranke ist, 4 aber keine obere Schranke ist.

b) unendlich viele Glieder -2 sind, -2 aber trotzdem untere Schranke ist.

c) 6 kleinste obere Schranke ist, aber kein Folgenglied gleich 6 ist.

Aufgaben zu Funktionentypen und Zahlenfolgen (12.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE)

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = \sqrt{e^x}$
In der Wurzel dürfen nur Werte $x \geqq 0$ stehen, ansonsten ist sie im reellen nicht definiert. Die Frage ist also, wann ist $e^x \geqq 0$?
Da e^x grundsätzlich positiv ist, bereitet es also keine Probleme. Daher ist $D = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \sqrt{\sin(x)}$
Hier ist es ähnlich wie in Aufgabe a). Die Frage ist jetzt, aber, wann ist $\sin(x) \geqq 0$?
Hier lohnt es sich einmal einen Blick auf das Grafikmenü des CAS zu werfen, um die Lösung besser zu verstehen. Aber der Solve-Befehl des CAS liefert die folgende Lösung in mathematischer Notation: $2 \cdot k \cdot \pi \leqq x \leqq 2 \cdot k \cdot \pi + \pi; k \in \mathbb{Z}$. Also ist $D = [2k\pi; 2k\pi + \pi]$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Der Definitionsbereich also besteht aus mehreren Teilintervallen.

c) $h(x) = \ln(\sin(x))$
Diese Aufgabe ist ähnlich wie Aufgabe b) mit dem einzigen Unterschied, dass der natürliche Logarithmus gebildet wird und nicht die Wurzel. Der Unterschied zwischen Logarithmen und Wurzeln ist, dass Logarithmen nur für positive Werte definiert sind (während bei Wurzeln auch die Gleichheit mit der Null zugelassen ist). Also muss die Gleichung $\sin(x) > 0$ gelöst werden und der Definitionsbereich ist ähnlich zu b): $D = (2k\pi; 2k\pi + \pi)$.

Aufgabe 2 (4 BE)

Verschieben Sie den Funktionsgraphen der gegebenen Funktionen

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5;$ 4 LE $\rightarrow$ 2 LE $\downarrow$
Zu bilden ist: $f(x-4) - 2 = 2 \cdot (x-4)^2 - 4 \cdot (x-4) + 5 - 4 = 2x^2 - 20x + 49$

b) $g(x) = e^{4x-7} - 2;$ 2 LE $\leftarrow$ 3 LE $\uparrow$
Zu bilden ist: $g(x+2) + 3 = e^{4\cdot(x+2)-7} - 2 + 3 = e^{4x+1} + 1$

Aufgabe 3 (4 + 2 + 2 + 4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(1|3)$, $B(2|7)$ und $C(4|6)$.

a) Bestimmen Sie die lineare Funktion $g_1(x)$, die durch A und B verlaufen sowie die lineare Funktion $g_2(x)$ durch B und C.
Beginnen wir mit $g_1(x)$: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{7-3}{2-1} = 4$
Um n zu ermitteln, wird ein Punkt in die Gleichung $y = m \cdot x + n$ eingesetzt (hier nun B).
$7 = 4 \cdot 2 + n \quad \Leftrightarrow \quad -1 = n \qquad \Rightarrow \underline{\underline{g_1(x) = 4x - 1}}$

Für $g_2(x)$ gehen wir analog vor: $m = \frac{6-7}{4-2} = -\frac{1}{2} \qquad 6 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = 8$
$\Rightarrow \underline{\underline{g_2(x) = -\frac{1}{2}x + 8}}$

b) Bestimmen Sie eine quadratische Funktion. deren Graph durch die drei Punkte verläuft.
Gesucht ist eine allgemeine quadratische Funktion vom Typ $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = y$. Durch die drei Punkte kann ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen aufgestellt werden.

$3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \quad \Leftrightarrow \quad 3 = a + b + c$
$7 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 4a + 2b + c$
$6 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 16a + 4b + c$

Dies kann mithilfe des CAS gelöst werden. Die Lösung ist: $a = -\frac{3}{2}; b = \frac{17}{2}$ und $c = -4$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{17}{2} \cdot x - 4}}$

c) Untersuchen Sie, ob es auch eine trigonometrische Funktion vom Typ $a \cdot \sin(b \cdot x) + d$ gibt.
Auch hier werden aus den drei Punkten drei Gleichungen aufgestellt.

$3 = a \cdot \sin(1 \cdot b) + d \qquad 7 = a \cdot \sin(2 \cdot b) + d \qquad 6 = a \cdot \sin(4 \cdot b) + d$

Diese drei Gleichungen werden von sehr vielen verschiedenen Parametern a, b und d gelöst.
Eine Möglichkeit wäre $a \approx -8,28 \cdot 10^{-10}; b = \pi$ und $c = \frac{13}{3}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = -8,28 \cdot 10^{-10} \cdot \sin(\pi \cdot x) + \frac{13}{3}}}$

d) Untersuchen Sie weiterhin, ob es eine Exponentialfunktion $a \cdot b^x + c$ durch drei Punkte oder ob es eine Exponentialfunktion vom Typ $a \cdot e^x + c$ durch zwei Punkte gibt.
Für die erste Aufgabenstellungen werden die folgenden drei Gleichungen aufgestellt:

$3 = a \cdot b^1 + c \qquad 7 = a \cdot b^2 + c \qquad 6 = b^4 + c \qquad \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad a = \frac{16}{3}; b = -\frac{1}{2}; c = \frac{17}{3}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{16}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^x + \frac{17}{3}}}$

Eine Exponentialfunktion zur Basis e durch zwei Punkte ist sicherlich auch möglich. Dazu werden hier die Punkte A und B genutzt:

$3 = a \cdot e^1 + c \qquad 7 = e^2 + c \qquad \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} a \approx 0,856; b \approx 0,672$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = 0,856 \cdot e^x + 0,672}}$

exakt wäre es $f(x) = \frac{4}{e \cdot (e-1)} \cdot e^x + \frac{3e-7}{e-1} = \frac{1}{e-1} \cdot \left(4 \cdot e^{x-1} + 3e - 7\right)$

Aufgabe 5 (3 BE)

Begründen Sie, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ ist.
Da $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ ist, gilt nach den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} = \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0$$

Aufgabe 6 (6 BE)

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen $(a_n) = (e^{-n})$ und $(b_n) = \left(\frac{1}{n} \cdot cos(n)\right)$. Stellen Sie dazu zunächst eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.
Beide Folgen sehen im Grafikmenü des CAS nach Nullfolgen aus (Folgen mit Grenzwert 0).

Es gilt: $\underbrace{(0)_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{hat Grenzwert } 0} \leqq (a_n) \leqq \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{hat Grenzwert } 0}$ Nach dem Sandwich-Theorem gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} e^{-n} = 0$

Hier gilt, dass $b_n \leqq |b_n| = \left|\frac{1}{n} \cdot \cos(n)\right| = \left|\frac{1}{n}\right| \cdot \underbrace{|\cos(n)|}_{\leqq 1} \leqq \left|\frac{1}{n}\right| \cdot 1 = \frac{1}{n}$

Also ist $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n} \cdot \cos(n)\right) = 0$.

Übrigens gilt grundsätzlich: Nullfolge mal beschränkte Folge ist wieder eine Nullfolge.

Aufgabe 7 (6 BE)

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Bestimmen Sie zu den gegebenen ε das entsprechende Folgenglied, ab dem alle weiteren in der Epsilon-Umgebung liegen.

a) $\varepsilon = \frac{1}{2}$
$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n > 1,8 \quad \Rightarrow N_\varepsilon = 2$

b) $\varepsilon = 0,02$
$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < 0,02 \quad \Rightarrow \quad n > 67,04 \quad \Rightarrow N_\varepsilon = 68$

c) $\varepsilon = 0,0007$
$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < 0,0007 \quad \Rightarrow \quad n > 9997424512284 \quad \Rightarrow N_\varepsilon = 9997424512285$

Aufgabe 8 (2 BE pro Aufgabe)

Geben Sie eine Folge an, für die:

a) 5 obere Schranke ist, 4 aber keine obere Schranke ist.
Beispiel: $\left(5-\frac{1}{n}\right)$

b) unendlich viele Glieder -2 sind, -2 aber trotzdem untere Schranke ist.
Beispiel: $((-1)^n \cdot 2)$

c) 6 kleinste obere Schranke ist, aber kein Folgenglied gleich 6 ist.
Beispiel: $\left(6-\frac{1}{n}\right)$

Aufgabe 4 (4 BE pro Aufgabe)

Stellen Sie die ersten 10 Folgenglieder der gegebenen Folge in einer Wertetabelle dar. Geben Sie außerdem das 20. und 100. Folgenglied an.

1. $(a_n) = (2 \cdot n^2)$
2. $(b_n) = ((-1)^n \cdot n)$
3. $(c_n) = \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n+2}\right)$
4. $(d_n) = \left(\frac{n}{2} \cdot (1 + (-1)^n)\right)$
5. $(e_n) = (|3 - n|)$
6. $(f_n) = \left(\sqrt[n]{5}\right)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	100
a_n	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200	800	20000
b_n	-1	2	-3	4	-5	6	-7	8	-9	10	20	100
c_n	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{102}$
d_n	0	2	0	4	0	6	0	8	0	10	20	100
e_n	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	17	97
f_n	5	2,24	1,71	1,50	1,38	1,31	1,26	1,22	1,20	1,17	1,08	1,02

Aufgaben zu Grenzwerte von Funktionen (18.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$(a)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{1-x} \qquad (b)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^3} \qquad (c)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5}{x+1}$$

Aufgabe 2 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}$. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$

Aufgabe 3 (3 + 2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{x^2-9}{(x-2)(x+3)}$.

1. Geben Sie den Definitionsbereich sowie die Achsenschnittpunkte der Funktion an und ermitteln Sie die Art der Definitionslücken.
2. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion für $x\to-\infty$ und $x\to\infty$.
3. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mindestens im Intervall von $-5\leqq x\leqq 6$ in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die Asymptoten und die (hebbare) Lücke.

Aufgabe 4 (6 BE)

Geben Sie zwei möglichst einfache Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ mit den gegebenen Eigenschaften an:

1. Die Funktion hat die waagerechte Asymptote $y=3$ und eine Polstelle bei $x_0=-2$.
2. Die Funktion besitzt eine (hebbare) Lücke an der Stelle $x_1=-3$.
3. Die Funktion nähert sich für $x\to\pm\infty$ der waagerechten Asymptote $y=-1$ an und hat den Definitionsbereich $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Aufgabe 5 (4 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen der gegebenen Funktionen.

(a) $h_1(x)=x^3-2x^2$

(b) $h_2(x)=e^{-x^3+2021}$

(c) $h_3(x)=\cos\left(\frac{2021}{x}\right)$

(d) $h_4(x)=e^{\frac{1}{2x}}$

Aufgaben zu Grenzwerte von Funktionen (18.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE)

Geben Sie die folgenden Grenzwerte an.

(a) $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{2x-1}{1-x} = -2$ (b) $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3} = 0$ (c) $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{x^2+5}{x+1}$ existiert nicht

Aufgabe 2 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}$. Geben Sie folgende Grenzwerte an:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 1$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 1$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = -1$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x) =$ existiert nicht
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x) = 0$

Aufgabe 3 (3 + 2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2-9}{(x-2)(x+3)}$.

1. Geben Sie den Definitionsbereich sowie die Achsenschnittpunkte der Funktion an und ermitteln Sie die Art der Definitionslücken.

   $D : x \in \mathbb{R}, x \neq 2, x \neq -3$; $S_x(3|0)$ und $S_y(0|\frac{3}{2})$; Polstelle bei $x = 2$, Lücke bei $x = -3$

2. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

3. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mindestens im Intervall von $-5 \leqq x \leqq 6$ in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die Asymptoten und die (hebbare) Lücke.

   Lösung auf der letzten Seite.

Aufgabe 4 (6 BE)

Geben Sie zwei möglichst einfache Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ mit den gegebenen Eigenschaften an:

1. Die Funktion hat die waagerechte Asymptote $y = 3$ und eine Polstelle bei $x_0 = -2$.

   $f_1(x) = \frac{1}{x+2} + 3$ $f_2(x) = \frac{3x}{x+2}$

2. Die Funktion besitzt eine (hebbare) Lücke an der Stelle $x_1 = -3$.

   $f_1(x) = \frac{x+3}{x+3}$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{x\cdot(x+3)}{x+3}$

3. Die Funktion nähert sich für $x \to \pm\infty$ der waagerechten Asymptote $y = -1$ an und hat den Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   $f_1(x) = \frac{1}{x} - 1$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{1}{x^2} - 1$

Aufgabe 5 (4 BE)

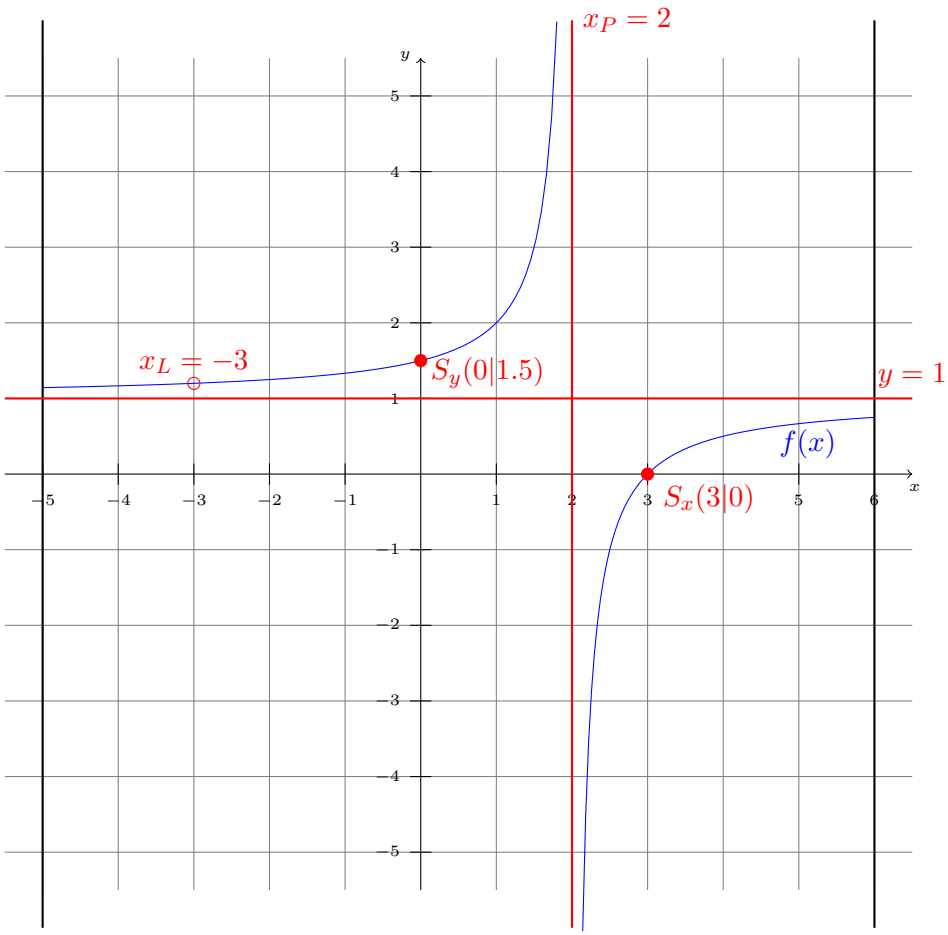
Bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen der gegebenen Funktionen.

(a) $h_1(x) = x^3 - 2x^2$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} h_1(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} h_1 f(x) = \infty$

(b) $h_2(x) = e^{-x^3+2021}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} h_2(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} h_2(x) = 1$

(c) $h_3(x) = \cos\left(\frac{2021}{x}\right)$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} h_3(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} h_3(x) = 1 \quad \to \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} h_3(x) = 1$

(d) $h_4(x) = e^{\frac{1}{2x}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} h_4(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} h_4(x) = 1 \quad \to \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} h_4(x) = 1$


$x_P = 2$
$x_L = -3$
$S_y(0|1.5)$
$y = 1$
$f(x)$
$S_x(3|0)$
x
y

Aufgaben zur Stetigkeit und mittleren/lokalen Änderungsrate (30.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{, für } x < 3 \\ \frac{1}{2} & \text{, für } x \geqq 3 \end{cases}$ an der Stelle $x_1 = 3$ unstetig ist.

Aufgabe 2 (6 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktionen an der Stelle $x_1 = 0$ unstetig sind:

a) $g_1(x) = \begin{cases} 2x + 7 & \text{, für } x < 0 \\ x - 1 & \text{, für } x \geqq 0 \end{cases}$

b) $g_2(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{, für } x \leqq 0 \\ 2x + 1 & \text{, für } x > 0 \end{cases}$

c) $g_3(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, für } x > 0 \\ 0 & \text{, für } x = 0 \\ -1 & \text{, für } x < 0 \end{cases}$

Aufgabe 3 (3 + 2 BE)

Bei einer Sonnenblume wird an verschiedenen Tagen die Höhe gemessen:

Zeit (in Tagen)	0	20	24	30	39	50	75
Höhe (in cm)	2	20	39	64	105	156	192

a) Zeichnen Sie den Graphen der Wachstumsfunktion $f(t) = h$ mit t ist die Zeit in Tagen und h die Höhe in cm.

b) Begründen Sie anhand dieser Darstellung, in welchem Zeitraum die Sonnenblume am stärksten und am schwächsten gewachsen ist.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 1 BE)

Die Stadt Friedland hat folgende Einwohnerzahlen[1] verzeichnet:

Jahr	1925	1989	2000	2006	2008	2011	2015	2017	2018
Einwohner	7.522	8.800	7.486	7.251	6.768	6.428	6.779	6.646	6.354

Begründen Sie mithilfe der mittleren Änderungsrate, in welchem Zeitraum

a) die Bevölkerungsentwicklung den stärksten Anstieg hat.

b) die Bevölkerungsentwicklung den stärksten Rückgang hat.

c) sich die Bevölkerungsentwicklung am stärksten verändert hat.

[1] Quelle: `https://www.laiv-mv.de/static/LAIV/Statistik/Dateien/Publikationen/A\%20I\%20Bev\%C3\%B6lkerungsstand/A\%20113/A113\%202018\%2000.pdf`

Aufgabe 5 (2 + 6 + 6 BE)

Die astronomische Sonnenscheindauer ist die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang in einer Region. Für Friedland (Breitengrad: 53°40‘ und Längengrad: 13°33‘) kann die astronomische Sonnenscheindauer für das Jahr 2019 durch die folgende Sinusfunktion angenähert werden[2]:

$$f(x) = y = \frac{289}{60} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 80)\right) + 12.25$$

Dabei wird x in Tagen angegeben und y in Stunden.

a) Erläutern Sie, was eine positive mittlere Änderungsrate bzw. eine negative mittlere Änderungsrate der astronomischen Sonnenscheindauer bedeuten.

b) Füllen Sie eine Wertetabelle für den 1. und 15. Tag jedes Monats aus.
(Beispiel: Der 01.06.2019 ist der 152. Tag, also $x = 152$ und $f(152) \approx 16,8$)

c) Bestimmen Sie fünf verschiedene mittlere Änderungsraten im Intervall [1;171] und fünf verschiedene mittlere Änderungsraten im Intervall [171;365]. Begründen Sie, mithilfe Ihrer Ergebnisse, warum die Tage vor dem 171. Tag des Jahres (20.06.2019) länger werden und danach kürzer.

Aufgabe 6 (5 BE)

Gute oder schlechte Nachrichten? Nehmen Sie Stellung.

a) „Der Anstieg der Inflationsrate verringert sich.“

b) „Die Zuwachsraten sinken.“

c) „Der Aufschwung erlahmt.“

d) „Die Talfahrt ist gebremst.“

e) „Die Neuverschuldungen sinken.“

Aufgabe 7 (3 BE)

Ein voll beladener LKW fährt die ersten 20 s an mit einer Funktion $s(t) = \frac{0,9}{2} \cdot t^2$. Berechnen Sie mithilfe des Differentialquotienten seine Momentangeschwindigkeit nach 5 s, 10 s und 20 s.

Zusatz (3 BE)

Beweisen Sie diese Folgerung aus dem Zwischenwertsatz und dem Nullstellensatz:

Seien $f(x)$ und $g(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$.

Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, sodass gilt:

$$f(c) = g(c)$$

Der Satz gilt auch für $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$.

Diese Aussage kann immer genutzt werden, um die Existenz von Schnittpunkten zu behaupten.

[2] Unter Verwendung von: `https://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneYear.php`

Aufgaben zur Stetigkeit und mittleren/lokalen Änderungsrate (30.08.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (3 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & , \text{ für } x < 3 \\ \frac{1}{2} & , \text{ für } x \geqq 3 \end{cases}$ an der Stelle $x_1 = 3$ unstetig ist.

$f(3) = \frac{1}{2}$, d.h. der Funktionswert existiert.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \frac{5}{2}$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \frac{1}{2}$ links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existiert nicht $\rightarrow f(x)$ ist an der Stelle $x_1 = 3$ unstetig.

Aufgabe 2 (6 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktionen an der Stelle $x_1 = 0$ unstetig sind:

a) $g_1(x) = \begin{cases} 2x + 7 & , \text{ für } x < 0 \\ x - 1 & , \text{ für } x \geqq 0 \end{cases}$

$g_1(0) = -1$, d.h. der Funktionswert existiert.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g_1(x) = 7$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g_1(x) = -1$

links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g_1(x)$ existiert nicht $\rightarrow g_1(x)$ ist an der Stelle $x_1 = 0$ unstetig.

b) $g_2(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & , \text{ für } x \leqq 0 \\ 2x + 1 & , \text{ für } x > 0 \end{cases}$

$g_2(0) = -3$, d.h. der Funktionswert existiert.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g_2(x) = -3$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g_2(x) = 1$

links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g_2(x)$ existiert nicht $\rightarrow g_2(x)$ ist an der Stelle $x_1 = 0$ unstetig.

c) $g_3(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ für } x > 0 \\ 0 & , \text{ für } x = 0 \\ -1 & , \text{ für } x < 0 \end{cases}$

$g_3(0) = 0$, d.h. der Funktionswert existiert.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g_3(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g_3(x) = 1$

links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g_3(x)$ existiert nicht $\rightarrow g_3(x)$ ist an der Stelle $x_1 = 0$ unstetig.

Aufgabe 3 (3 + 2 BE)

Bei einer Sonnenblume wird an verschiedenen Tagen die Höhe gemessen:

Zeit (in Tagen)	0	20	24	30	39	50	75
Höhe (in cm)	2	20	39	64	105	156	192

a) Zeichnen Sie den Graphen der Wachstumsfunktion $f(t) = h$ mit t ist die Zeit in Tagen und h die Höhe in cm.
Grafische Darstellung sehr aufwändig in diesem Programm.

b) Begründen Sie anhand dieser Darstellung, in welchem Zeitraum die Sonnenblume am stärksten und am schwächsten gewachsen ist.
Der Anstieg im Intervall [0;20] ist am schwächsten, deshalb wächst die Sonnenblume in diesem Zeitraum am schwächsten.
Der Anstieg im Intervall [20;24] ist am stärksten, deshalb wächst die Sonnenblume in diesem Zeitraum am stärksten.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 1 BE)

Die Stadt Friedland hat folgende Einwohnerzahlen[1] verzeichnet:

Jahr	1925	1989	2000	2006	2008	2011	2015	2017	2018
Einwohner	7.522	8.800	7.486	7.251	6.768	6.428	6.779	6.646	6.354

Begründen Sie mithilfe der mittleren Änderungsrate, in welchem Zeitraum

a) die Bevölkerungsentwicklung den stärksten Anstieg hat.

$[1925 : 1989] \approx 19,97$ $[1989 : 2000] \approx -119,45$ $[2000 : 2006] \approx -39,17$
$[2006 : 2008] = -241,5$ $[2008 : 2011] \approx -113,33$ $[2011 : 2015] = 87,75$
$[2015 : 2017] = -66,5$ $[2017 : 2018] = -292$

Der stärkste Anstieg ist im Zeitraum 2011 bis 2015.

b) die Bevölkerungsentwicklung den stärksten Rückgang hat.
Der stärkste Rückgang ist im Zeitraum 2017 bis 2018.

c) sich die Bevölkerungsentwicklung am stärksten verändert hat.
Die Bevölkerung hat sich am stärksten im Zeitraum von 2017 bis 2018 verändert.

Aufgabe 5 (2 + 6 + 6 BE)

Die astronomische Sonnenscheindauer ist die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang in einer Region. Für Friedland (Breitengrad: 53°40‘ und Längengrad: 13°33‘) kann die astronomische Sonnenscheindauer für das Jahr 2019 durch die folgende Sinusfunktion angenähert werden[2]:

$$f(x) = y = \frac{289}{60} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 80)\right) + 12.25$$

Dabei wird x in Tagen angegeben und y in Stunden.

a) Erläutern Sie, was eine positive mittlere Änderungsrate bzw. eine negative mittlere Änderungsrate der astronomischen Sonnenscheindauer bedeuten.

Eine positive Änderungsrate bedeutet, dass die Sonnenscheindauer sich erhöht (die Tage

[1] Quelle: `https://www.laiv-mv.de/static/LAIV/Statistik/Dateien/Publikationen/A\%20I\%20Bev\%C3\%B6lkerungsstand/A\%20113/A113\%202018\%2000.pdf`

[2] Unter Verwendung von: `https://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneYear.php`

werden länger).
Eine negative Änderungsrate bedeutet, dass die Sonnenscheindauer sinkt (die Tage werden kürzer).

b) Füllen Sie eine Wertetabelle für den 1. und 15. Tag jedes Monats aus.
(Beispiel: Der 01.06.2019 ist der 152. Tag, also $x = 152$ und $f(152) \approx 16,8$)

Datum 2019 x	01.01. 1	15.01. 15	01.02. 32	15.02. 46	01.03. 60	15.03. 74	01.04. 91	15.04. 105
Sonnenscheindauer in h	7,54	7,92	8,71	9,59	10,62	11,75	13,16	14,26
Datum 2019 x	01.05. 121	15.05. 135	01.06. 152	15.06. 166	01.07. 182	15.07. 196	01.08. 213	15.08. 227
Sonnenscheindauer in h	15,37	16,16	16,80	17,05	16,98	16,64	15,88	15,01
Datum 2019 x	01.09. 244	15.09. 258	01.10. 274	15.10. 288	01.11. 305	15.11. 319	01.12. 335	15.12. 349
Sonnenscheindauer in h	13,76	12,62	11,30	10,20	9,03	8,27	7,68	7,45

c) Bestimmen Sie fünf verschiedene mittlere Änderungsraten im Intervall [1;171] und fünf verschiedene mittlere Änderungsraten im Intervall [171;365]. Begründen Sie, mithilfe Ihrer Ergebnisse, warum die Tage vor dem 171. Tag des Jahres (20.06.2019) länger werden und danach kürzer.

Alle mittleren Änderungsraten im Intervall [1;171] sind positiv, egal welche Teilintervalle gewählt werden. Daher werden die Tage in diesen Intervallen stets länger.
Alle mittleren Änderungsraten im Intervall [171;365] sind negativ, egal welche Teilintervalle gewählt werden. Daher werden die Tage in diesen Intervallen stets kürzer.

Aufgabe 6 (5 BE)

Gute oder schlechte Nachrichten? Nehmen Sie Stellung.

a) „Der Anstieg der Inflationsrate verringert sich.“
Das ist zwar grundsätzlich gut, allerdings gibt es noch eine Inflationsrate, auch wenn sie kleiner geworden ist.

b) „Die Zuwachsraten sinken.“
Das ist nicht ganz gut, allerdings gibt es noch Zuwachsraten, auch wenn sie gesunken sind.

c) „Der Aufschwung erlahmt.“
Es gibt noch einen Aufschwung, dieser ist jedoch kleiner geworden. Es ist gut, dass es noch einen Aufschwung gibt, schlecht, dass er gesunken ist.

d) „Die Talfahrt ist gebremst.“
Damit ist sie jedoch nicht ausgebremst, sondern es gibt noch eine Talfahrt. Gut für die Sicherheit, schlecht für das Fahrerlebnis.

e) „Die Neuverschuldungen sinken.“
Damit sind die Neuverschuldungen zurück gegangen, allerdings gibt es noch Neuverschuldungen, was weiterhin negativ ist.

Aufgabe 7 (3 BE)

Ein voll beladener LKW fährt die ersten 20 s an mit einer Funktion $s(t) = \frac{0{,}9}{2} \cdot t^2$. Berechnen Sie mithilfe des Differentialquotienten seine Momentangeschwindigkeit nach 5 s, 10 s und 20 s.

$$s'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = 4,5 \ \frac{m}{s}$$

$$s'(10) = \lim_{x \to 10} \frac{s(t) - s(10)}{t - 10} = 9 \ \frac{m}{s}$$

$$s'(20) = \lim_{x \to 20} \frac{s(t) - s(20)}{t - 20} = 18 \ \frac{m}{s}$$

Zusatz (3 BE)

Beweisen Sie diese Folgerung aus dem Zwischenwertsatz und dem Nullstellensatz:

Seien $f(x)$ und $g(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$.

Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, sodass gilt:

$$f(c) = g(c)$$

Der Satz gilt auch für $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$.

Diese Aussage kann immer genutzt werden, um die Existenz von Schnittpunkten zu behaupten.

Um diese Aussage zu beweisen, definiert man sich die Differenzfunktion

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

(oder $h(x) = g(x) - f(x)$ für den zweiten Fall des Satzes).
Dann gilt:

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \text{ und } h(b) = f(b) - g(b) > 0$$

Bzw.

$$h(a) < 0 \text{ und } h(b) > 0$$

Nun folgt nach Nullstellensatz, dass es ein $c \in (a, b)$ geben muss, für welches gilt:

$$h(c) = 0$$

Also:

$$f(c) - g(c) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(c) = g(c)$$

$\square$

Aufgaben zur Ableitung (09.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (10 BE)

Leiten Sie folgende Funktionen nach x ab.

- $a(x) = 4x^5$
- $b(x) = x^{19}$
- $c(x) = x^{3,4}$
- $d(x) = 4x^3 - 7x^2$
- $e(x) = \frac{5}{x}$
- $f(x) = \frac{4}{x^3}$
- $g(x) = \sqrt[3]{x^4}$
- $h(x) = \sqrt[7]{x}$
- $i(x) = 6x^2 + 9x - \pi$
- $j(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{4}{25}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - 3x + 3t$

Aufgabe 2 ohne CAS (14 BE)

Bestimmen Sie die Ableitungen:

a) $\frac{d}{dx}(5x^4 - 3x^2 + 8x - 5,673) =$

b) $\frac{d}{dt}(5x^3t^4 - 3x^2t + 6xt^2 - 7a) =$

c) $\frac{d}{dx}(5x^3t^4 - 3x^2t + 6xt^2 - 7a) =$

d) $\frac{d}{da}(5x^3t^4 - 3x^2t + 6xt^2 - 7a) =$

e) $\frac{d}{dx}(3x^2t^2a^4 - 2x^4t^{10}a^3) =$

f) $\frac{d}{dt}(3x^2t^2a^4 - 2x^4t^{10}a^3) =$

g) $\frac{d}{da}(3x^2t^2a^4 - 2x^4t^{10}a^3) =$

Aufgabe 3 ohne CAS (1 + 2 + 4 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x + 2$ und $g(x) = x^2 + 4x$.

a) Geben Sie $f'(x)$ und $g'(x)$ an.

b) Bestimmen Sie jeweils den Anstieg von $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle $x_0 = 5$

c) Berechnen Sie jeweils die Anstiege von $f(x)$ und $g(x)$ an ihren Schnittstellen.

Aufgabe 4 ohne CAS (2 + 1 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 - 3x - 18$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

b) Geben Sie $f'(x)$ an.

c) Bestimmen Sie jeweils den Anstieg an den Stellen $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0,5$, $x_4 = 2$ und $x_5 = 5$.

d) Berechnen Sie die Stelle x_0, an welcher der Anstieg $m = 15$ ist.

Aufgabe 5 (1 + 2 + 2 + 2 + 3 BE)

Astrid Kumbernuss (*05.02.1970 in Grevesmühlen) hat ihre Kugel 1995 in Göteborg auf folgender Wurfparabel gestoßen:

$$k(x) = -\frac{51645}{1125721}x^2 + \frac{9}{10}x + 1,56$$

Dabei sind x und y jeweils in Meter gegeben.

a) Begründen Sie, dass Astrid Kumbernuss 186 cm groß ist unter der Annahme, dass eine Kugel auf Schulterhöhe (etwa 30 cm unter der Körpergröße) abgestoßen wird.

b) Der Weltrekord für Frauen im Kugelstoßen liegt bei 22,63 m (Natalja Lissowskaja, 1987). Weisen Sie nach, dass Astrid Kumbernuss lediglich 1,41 m weniger geworfen hat.

c) Bestimmen Sie, nach wie vielen Metern, die Kugel über 2,10 m hoch flog.

d) Begründen Sie, dass nach ca. 9,809 m die Kugel fällt.

e) Berechnen Sie den Anstiegswinkel, mit welchem sie die Kugel abgestoßen hat. (Hilfe: $m = \tan\alpha$)

Aufgabe 6 ohne CAS (3 BE)

Ein voll beladener LKW fährt die ersten 20 s an mit einer Funktion $s(t) = \frac{0,9}{2} \cdot t^2$.

Berechnen Sie mithilfe von $s'(t)$ seine Momentangeschwindigkeit nach 5 s, 10 s und 20 s.

Aufgabe 7 ohne CAS (14 BE)

Geben Sie das Verhalten im Unendlichen für die vorgegebenen Funktionen an.

$f(x) = -13x + 5x^4 - 12x^2$ $\quad g(x) = 150x^4 - 0,2x^6$ $\quad h(x) = 7x^2 + x^{15} - x^{14}$

$k(x) = -\pi \cdot x^5 + \sqrt{2} \cdot x^4$ $\quad l(x) = e^x$ $\quad m(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad n(x) = e^{-x}$

Aufgaben zur Ableitung (09.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (10 BE)

Leiten Sie folgende Funktionen nach x ab.

- $a(x) = 4x^5$ $\qquad a'(x) = 20x^4$
- $b(x) = x^{19}$ $\qquad b'(x) = 19x^{18}$
- $c(x) = x^{3,4}$ $\qquad c'(x) = 3,4x^{2,4}$
- $d(x) = 4x^3 - 7x^2$ $\qquad d'(x) = 12x^2 - 14x$
- $e(x) = \frac{5}{x}$ $\qquad e'(x) = -5x^{-2} = -\frac{5}{x^2}$
- $f(x) = \frac{4}{x^3}$ $\qquad f'(x) = -12x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$
- $g(x) = \sqrt[3]{x^4}$ $\qquad g'(x) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$
- $h(x) = \sqrt[7]{x}$ $\qquad h'(x) = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7 \cdot x^{\frac{6}{7}}} = \frac{1}{7 \cdot \sqrt[7]{x^6}}$
- $i(x) = 6x^2 + 9x - \pi$ $\qquad i'(x) = 12x + 9$
- $j(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{4}{25}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - 3x + 3t$ $\qquad j'(x) = 3x^5 - \frac{4}{5}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - 3$

Ich habe bei einigen die Notation $a(x) = 4x^5 = 20x^4$ gesehen. Das ist falsch.
Bitte $a(x)$ und $a'(x)$ als zwei einzelne Funktionen aufschreiben.

Wer schreibt, der bleibt!

Aufgabe 2 ohne CAS (14 BE)

Bestimmen Sie die Ableitungen:

a) $\frac{d}{dx}(5x^4 - 3x^2 + 8x - 5,673) = 20x^3 - 6x + 8$

b) $\frac{d}{dt}(5x^3t^4 - 3x^2t + 6xt^2 - 7a) = 20x^3t^3 - 3x^2 + 12xt$

c) $\frac{d}{dx}(5x^3t^4 - 3x^2t + 6xt^2 - 7a) = 15x^2t^4 - 6xt + 6xt^2$

d) $\frac{d}{da}(5x^3t^4 - 3x^2t + 6xt^2 - 7a) = 7$

e) $\frac{d}{dx}(3x^2t^2a^4 - 2x^4t^{10}a^3) = 6xt^2a^4 - 8x^3t^{10}a^3$

f) $\frac{d}{dt}(3x^2t^2a^4 - 2x^4t^{10}a^3) = 6x^2ta^4 - 20x^4t^9a^3$

g) $\frac{d}{da}(3x^2t^2a^4 - 2x^4t^{10}a^3) = 12x^2t^2a^3 - 6x^4t^{10}a^2$

Aufgabe 3 ohne CAS (1 + 2 + 4 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x + 2$ und $g(x) = x^2 + 4x$.

a) Geben Sie $f'(x)$ und $g'(x)$ an. $f'(x) = 3$ und $g'(x) = 2x + 4$

b) Bestimmen Sie jeweils den Anstieg von $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle $x_0 = 5$

$f'(5) = 3$ und $g'(5) = 2 \cdot 5 + 4 = 14$

c) Berechnen Sie jeweils die Anstiege von $f(x)$ und $g(x)$ an ihren Schnittstellen.

Schnittstellen berechnen:

$f(x) = g(x)$ also $3x + 2 = x^2 + 4x$ umformen liefert: $0 = x^2 + x - 2$

Aus der p-q-Formel folgt: $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

Anstiege an den Stellen:

Stelle $x_1 = -2$: $f'(-2) = 3$ und $g'(-2) = 0$

Stelle $x_2 = 1$: $f'(1) = 3$ und $g'(1) = 6$

Aufgabe 4 ohne CAS (2 + 1 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 - 3x - 18$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x)$.
$0 = 3x^2 - 3x - 18$ (durch 3 geteilt für Normalform) $0 = x^2 - x - 6$

Aus der p-q-Formel folgt: $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$

b) Geben Sie $f'(x)$ an. $f'(x) = 6x - 3$

c) Bestimmen Sie jeweils den Anstieg an den Stellen $x_0 = -5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0,5$, $x_4 = 2$ und $x_5 = 5$.

$f'(-5) = -33$ $f'(-1) = -9$ $f'(0) = -3$ $f'(0,5) = 0$ $f'(2) = 9$ $f'(5) = 27$

d) Berechnen Sie die Stelle x_0, an welcher der Anstieg $m = 15$ ist.

$15 = 6x - 3$ umformen liefert: $18 = 6x$ $\Rightarrow$ $x = 3$

An der Stelle $x = 3$ hat die Funktion $f(x)$ den Anstieg $m = 15$.

Aufgabe 5 (1 + 2 + 2 + 2 + 3 BE)

Astrid Kumbernuss (*05.02.1970 in Grevesmühlen) hat ihre Kugel 1995 in Göteborg auf folgender Wurfparabel gestoßen:

$$k(x) = -\frac{51645}{1125721}x^2 + \frac{9}{10}x + 1,56$$

Dabei sind x und y jeweils in Meter gegeben.

a) Begründen Sie, dass Astrid Kumbernuss 186 cm groß ist unter der Annahme, dass eine Kugel auf Schulterhöhe (etwa 30 cm unter der Körpergröße) abgestoßen wird.

Dafür betrachtet man die Höhe der Kugel beim Abstoß: $f(0) = 1,56$ also 1,56 m Abstoßhöhe. Werden dazu 30 cm addiert, ergibt sich eine Körpergröße von 1,86 m bzw. 186 cm.

b) Der Weltrekord für Frauen im Kugelstoßen liegt bei 22,63 m (Natalja Lissowskaja, 1987). Weisen Sie nach, dass Astrid Kumbernuss lediglich 1,41 m weniger geworfen hat.

Gesucht ist die Stelle, wo die Kugel den Boden berührt, das ist die Nullstelle.

$0 = -0,05x^2 + 0,9733x + 1,86$

$\Rightarrow x_1 \approx -1,60$ entfällt, da dies rückwärts Werfen bedeutet und $x_2 = 21,22$

$21,22$ m ist $1,41$ m von $22,63$ m entfernt.

c) Bestimmen Sie, nach wie vielen Metern, die Kugel über 2,10 m hoch flog.

$2,1 = k(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 0,62$ und $x_2 \approx 19,00$.

Also nach 0,62 m ist die Kugel über 2,1 m hoch.

d) Begründen Sie, dass nach ca. 9,809 m die Kugel fällt.

Bei 9,809 ist der Scheitelpunkt der Parabel, dies kann man daran erkennen, dass an der Stelle $x = 9,809$ der Anstiegfast 0 ist, also $f'(9,809) \approx 0$.
Danach sind alle Anstiege negativ. Deshalb fällt die Kugel nach 9,809 m.

e) Berechnen Sie den Anstiegswinkel, mit welchem sie die Kugel abgestoßen hat.
(Hilfe: $m = \tan\alpha$)

$f'(0) = 0,9$ in die Formel $m = \tan\alpha$ eingesetzt folgt: $0,9 = \tan\alpha$

$\alpha = \tan^{-1}(0,9)$ also $\alpha \approx 42,0°$

Aufgabe 6 ohne CAS (3 BE)

Ein voll beladener LKW fährt die ersten 20 s an mit einer Funktion $s(t) = \frac{0,9}{2} \cdot t^2$.

Berechnen Sie mithilfe von $s'(t)$ seine Momentangeschwindigkeit nach 5 s, 10 s und 20 s.

$s'(t) = 2 \cdot \frac{0,9}{2} \cdot t = 0,9t \qquad s'(5) = 4,5\frac{m}{s}, \quad s'(10) = 9\frac{m}{s}$ und $s'(20) = 18\frac{m}{s}$.

Aufgabe 7 ohne CAS (14 BE)

Geben Sie das Verhalten im Unendlichen für die vorgegebenen Funktionen an.

$f(x) = -13x + 5x^4 - 12x^2 \qquad g(x) = 150x^4 - 0,2x^6 \qquad h(x) = 7x^2 + x^{15} - x^{14}$

$k(x) = -\pi \cdot x^5 + \sqrt{2} \cdot x^4 \qquad l(x) = e^x \qquad m(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad n(x) = e^{-x}$

Funktion	$\lim\limits_{x\to-\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}$
$f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$
$g(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$
$h(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = +\infty$	/
$k(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} k(x) = -\infty$	/
$l(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} l(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty} l(x) = +\infty$	/
$m(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} m(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to\infty} m(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} m(x) = 1$
$n(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} n(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} n(x) = 0$	/

Aufgaben zu Tangenten/Normalen (16.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (12 BE)

Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen der gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + 3x - 1)$

b) $f(s) = t \cdot \sqrt{s} \cdot \cos(s)$

c) $f(x) = (\sin(x) - 2x)^2$

d) $f(x) = a^x \cdot \cos(b^x)$

e) $f(x) = \cos(3 \cdot e^x - 2x)$

f) $f(x) = e^{2x} \cdot (x^2 - 3x)$

Aufgabe 2 ohne CAS (1 + 4 + 2 + 2* BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x + 2$ und $g(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 + 2x$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $f(x) = g'(x)$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten und Normalen an $g(x)$ im Punkt $O\,(0|0)$.

c) Weisen Sie nach, dass die Tangente an $g(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{1}{3}$ parallel zu $f(x)$ ist.

d*) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente aus Aufgabe c).
(Zum Vergleich: $t : y = 3x - \frac{1}{6}$)

Aufgabe 3 ohne CAS (8 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

b) Bestimmen Sie den Anstieg des Graphen an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen an der Stelle $x_0 = 1$.

d) Begründen Sie, dass f an der Stelle $x_0 = 2$ zwar eine Tangente, allerdings keine Normale besitzt.

Aufgabe 4 ohne CAS (4 + 2 BE)

Gegeben sind der Graph G_h der gebrochenrationalen Funktion $h(x) = \frac{4}{x^2}$ und der Punkt $B\,(2|h(2))$.
Die Tangente t an G_h im Punkt B schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung, durch welche die Tangente t beschrieben werden kann.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 5 ohne CAS (12 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto (x+2)^2 - 9$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die gegebenen Punkte.

a) $A(1|2)$ und $B(3|-10)$

b) $C\,(2|f(2))$ und $D(0|1)$

c) $E\,(-1|f(-1))$ und $F\,(0|f(0))$

d) $G\,(-5|f(-5))$ und $H\,(-4|f(-4))$

Aufgabe 6 a) bis d) ohne CAS (15 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto -x^2 + 5x - 2$.
Bestimmen Sie die Geraden- bzw. Tangentengleichungen für die gegebenen Eigenschaften.

a) Die Gerade g_1 hat einen Anstieg $m = -2$ und verläuft durch den Punkt $P_1(3|2)$.

b) Die Gerade g_2 verläuft durch den Punkt $P_2\,(3|g(3))$ und ist parallel zu $y = 4x - 2$.

c) Die Tangente g_3 berührt an der Stelle $x = 3$ den Funktionsgraphen.

d) Die Tangente g_4 berührt an der Stelle $x = 1$ den Funktionsgraphen.

e) Die Gerade g_5 hat einen Anstiegswinkel $\alpha = 30°$ und verläuft durch den Punkt $P_3\,(0|g(0))$

Aufgabe 7 ohne CAS (9 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto -3x^2 + 12x - 9$.
Berechnen Sie die Stelle, an welcher die Tangente den gegebenen Anstieg besitzt. Geben Sie anschließend die Tangentengleichung an.

a) $m = 12$

b) $m = -6$

c) $m = 0$

Aufgabe 8 (2 + 2 + 2 + 3 BE + 2 Zusatzpunkte)

Die Helpter Berge sind die höchste natürliche Erhebung in unserem Bundesland. Wenn das Profil des Berges extrem stark vereinfacht wird, kann es mit folgender Funktion $h(x)$ beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{1}{288.000}x^3 + \frac{307}{180.000}x^2 - \frac{103}{1.200}x + 145, \qquad 0 \leqq x \leqq 450$$

Dabei gibt x die Entfernung in m an und y die Erhöhung über Normalhöhennull (NHN) in m.

a) Geben Sie die Höhe zu Beginn und zum Ende des Bergprofils an.

(Vergleich: Woldegk liegt ca. 112 m über NHN; Friedland liegt ca. 16 m über NHN; Neubrandenburg Innenstadt liegt ca. 20 m über NHN und der Datzeberg ca. 57 m über NHN)[1]

b) Bestimmen Sie, wie weit es von Beginn der Berge bis zum Höchsten Punkt auf einer Höhe von 179 m über NHN ist.

c) Bestimmen Sie den mittleren Anstieg der Berge im Intervall $[0; x_{\text{HP}}]$ und im Intervall $[x_{\text{HP}}; 450]$. Geben Sie anschließen die Anstiegswinkel an.

(Hinweis: x_{HP} ist der x-Wert des Hochpunktes, welcher in Aufgabe b) ermittelt wurde.)

d) Zu Beginn und zum Ende des Berges soll eine Straße anschließen, welche geradlinig verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für eine der beiden Straßen.

e*) Beurteilen Sie, warum der Funktionsgraph extrem stark vereinfacht ist.

[1] Daten ermittelt durch `https://www.mapcoordinates.net/de`.

Aufgaben zu Tangenten/Normalen (16.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (12 BE)

Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen der gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + 3x - 1) = x^5 + 3x^4 - x^3$

$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 3x^2$ $\qquad$ $f''(x) = 20x^3 + 36x^2 - 6x$

b) $f(s) = t \cdot \sqrt{s} \cdot \cos(s)$

$f'(s) = t \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{s}} \cdot \cos(s) + \sqrt{s} \cdot (-\sin(s))\right) = t \cdot \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{s}} \cdot \cos(s) - \sqrt{s} \cdot \sin(s)\right)$

$$f''(s) = t \cdot \left(-\frac{1}{4\cdot\sqrt{s^3}} \cdot \cos(s) \underbrace{- \frac{1}{2 \cdot \sqrt{s}} \cdot \sin(s) - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{s}} \cdot \sin(s)}_{=2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{s}}\cdot\sin(s)} - \sqrt{s} \cdot \cos(s) \right)$$

$f''(s) = t \cdot \left(\left(-\frac{1}{4\cdot\sqrt{s^3}} - \sqrt{s}\right) \cdot \cos(s) - \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \sin(s)\right)$

c) $f(x) = (\sin(x) - 2x)^2$

$f'(x) = 2 \cdot (\sin(x) - 2x) \cdot (\cos(x) - 2)$

$f''(x) = 2 \cdot ((\cos(x) - 2) \cdot (\cos(x) - 2) + (\sin(x) - 2x) \cdot (-\sin(x)))$

$f''(x) = 2 \cdot \left((\cos(x) - 2)^2 - (\sin(x))^2 + 2x \cdot \sin(x)\right)$

d) $f(x) = a^x \cdot \cos(b^x)$

$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \cdot \cos(b^x) + a^x \cdot \ln(b) \cdot b^x \cdot (-\sin(b^x)) = \ln(a) \cdot a^x \cdot \cos(b^x) - a^x \cdot \ln(b) \cdot b^x \cdot \sin(b^x)$

$f'(x) = a^x \cdot (\ln(a) \cdot \cos(b^x) - \ln(b) \cdot b^x \cdot \sin(b^x))$

$f''(x) = \ln(a) \cdot a^x \cdot (\ln(a) \cdot \cos(b^x) - \ln(b) \cdot b^x \cdot \sin(b^x))$
$+a^x \cdot \left(-\ln(a) \cdot \ln(b) \cdot b^x \cdot \sin(b^x) - (\ln(b))^2 \cdot b^x \cdot \sin(b^x) - (\ln(b))^2 \cdot b^x \cdot b^x \cdot \cos(b^x)\right)$

e) $f(x) = \cos(3 \cdot e^x - 2x)$

$f'(x) = (3 \cdot e^x - 2) \cdot (-\sin(3 \cdot e^x - 2x))$

$f''(x) = 3 \cdot e^x \cdot (-\sin(3 \cdot e^x - 2x)) + (3 \cdot e^x - 2)^2 \cdot (-\cos(3^x - 2x))$

f) $f(x) = e^{2x} \cdot (x^2 - 3x)$

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot (x^2 - 3x) + e^{2x} \cdot (2x - 3) = e^{2x} \cdot (2x^2 - 4x - 3)$

$f''(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot (2x^2 - 4x - 3) + e^{2x} \cdot (4x - 4) = e^{2x} \cdot (4x^2 - 4x - 10)$

Aufgabe 2 ohne CAS (1 + 4 + 2 + 2* BE)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x + 2$ und $g(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 + 2x$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $f(x) = g'(x)$.

$g'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 1 = 3x + 2 = f(x)$

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten und Normalen an $g(x)$ im Punkt $O\,(0|0)$.

$g'(x) = 3x + 2 \qquad g'(0) = 2 \quad$ also $m_T = 2$

$y = m \cdot x + n \quad$ Punkt $O\,(0|0)$ und $m_T = 2$ einsetzen: $0 = 2 \cdot 0 + n$ also $n = 0$

$t : y = 2x$

Der Anstieg der Normalen ist $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{2}$

$y = m \cdot x + n \quad$ Punkt $O\,(0|0)$ und $m_N = -\frac{1}{2}$ einsetzen: $0 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + n$ also $n = 0$

$nor : y = -\frac{1}{2}x$

c) Weisen Sie nach, dass die Tangente an $g(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{1}{3}$ parallel zu $f(x)$ ist.

$g'(\frac{1}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 3 \quad$ also ist der Anstieg der Tangente $m = 3$. Das ist parallel zu $f(x)$.

d*) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente aus Aufgabe c) an.
(Zum Vergleich: $t : y = 3x - \frac{1}{6}$)

Punkt berechnen: $g(\frac{1}{3}) = \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \quad \rightarrow \quad P\left(\frac{1}{3}|\frac{5}{6}\right)$

Anstieg an der Stelle $x = \frac{1}{3}$ berechnen: Aufgabe c) $\quad \rightarrow \quad m_T = 3$

Tangengleichung bestimmen: $y = m \cdot x + n \quad \rightarrow \quad \frac{5}{6} = 3 \cdot \frac{1}{3} + n \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{6} = n$

$t : y = 3x - \frac{1}{6}$

Aufgabe 3 ohne CAS (8 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

$0 = -3x^2 + 12x - 9 \quad \rightarrow \quad 0 = x^2 - 4x + 3$

p-q-Formel anwenden führt zu: $\quad x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

b) Bestimmen Sie den Anstieg des Graphen an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.

$f'(x) = -6x + 12 \quad \rightarrow \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 9 \quad \rightarrow \quad m = 9$

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen an der Stelle $x_0 = 1$.

Punkt bestimmen: $f(1) = -3 \cdot 1 + 12 \cdot 1 - 9 = 0$, also ist der Punkt $P(1|0)$

Anstieg der Normalen bestimmen: $m_T = f'(1) = 6 \quad \rightarrow \quad m_N = -\frac{1}{6}$

Normalengleichung aufstellen: $y = m \cdot x + n \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{6} \cdot 1 + n \quad \rightarrow \quad n = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ nor : $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$

d) Begründen Sie, dass f an der Stelle $x_0 = 2$ zwar eine Tangente, allerdings keine Normale besitzt.

$f'(2) = 0 = m_T \quad \rightarrow \quad m_N = -\frac{1}{0}$ ist nicht definiert, deshalb existiert an der Stelle zwar eine Tangente mit Anstieg 0, aber keine Normale.

Aufgabe 4 ohne CAS (4 + 2 BE)

Gegeben sind der Graph G_h der gebrochenrationalen Funktion $h(x) = \frac{4}{x^2}$ und der Punkt $B\,(2|h(2))$.

Die Tangente t an G_h im Punkt B schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung, durch welche die Tangente t beschrieben werden kann.

Koordinaten von Punkt B berechnen: $h(2) = \frac{4}{2^2} = 1$, also ist $B(2|1)$

Anstieg bestimmen: $h'(x) = -\frac{8}{x^3} \quad \rightarrow \quad h'(2) = -\frac{8}{2^3} = -1 = m_T$

Tangentengleichung ermitteln: $y = m \cdot x + n \quad \rightarrow \quad 1 = -1 \cdot 2 + n \quad \rightarrow \quad n = 3$

$\Rightarrow t : y = -x + 3$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Das Dreieck ist rechtwinklig. Die Höhe und Länge ist durch die Koordinatenschnittpunkte bestimmt, also müssen diese bestimmt werden, um sie dann in die Formel $A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ einzusetzen.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $t(0) = 3$

$\rightarrow \quad S_y(0|3)$, also hat das Dreieck eine Höhe von 3 LE.

Schnittpunkt mit der x-Achse: $0 = -x + 3 \quad \rightarrow \quad x = 3$

$\rightarrow \quad S_x(3|0)$, also hat das Dreieck eine Länge von 3 LE.

$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ LE} \cdot 3 \text{ LE} = \frac{9}{2} \text{ FE} = 4,5 \text{ FE}.$

Aufgabe 5 ohne CAS (12 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto (x+2)^2 - 9$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die gegebenen Punkte.

a) $A(1|2)$ und $B(3|-10)$

$m = \frac{-10-2}{3-1} = -6$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow 2 = -6 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 8$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -6x + 8}}$

b) $C\,(2|f(2))$ und $D(0|1)$

$f(2) = (2+2)^2 - 9 = 7 \Rightarrow C(2|7)$

$m = \frac{7-1}{2-0} = 3$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow 7 = 3 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 3x + 1}}$

c) $E\,(-1|f(-1))$ und $F\,(0|f(0))$

$f(-1) = (-1+2)^2 - 9 = -8 \Rightarrow E(-1|-8)$

$f(0) = (0+2)^2 - 9 = -5 \Rightarrow F(0|-5)$

$m = \frac{-5+8}{0+1} = 3$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow -5 = 3 \cdot 0 + n \Rightarrow n = -5$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 3x - 5}}$

d) $G\,(-5|f(-5))$ und $H\,(-4|f(-4))$

$f(-5) = (-5+2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow G(-5|0)$

$f(-4) = (-4+2)^2 - 9 = -5 \Rightarrow H(-4|-5)$

$m = \frac{-5-0}{-4+5} = -5$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow 0 = -5 \cdot (-5) + n \Rightarrow n = -25$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -5x - 25}}$

Aufgabe 6 a) bis d) ohne CAS (15 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto -x^2 + 5x - 2$. $\rightarrow$ $g'(x) = -2x + 5$

Bestimmen Sie die Geraden- bzw. Tangentengleichungen für die gegebenen Eigenschaften.

a) Die Gerade g_1 hat einen Anstieg $m = -2$ und verläuft durch den Punkt $P_1(3|2)$.

$y = m \cdot x + n \Rightarrow 2 = -2 \cdot 3 + n \Rightarrow n = 8$ $g_1(x) = -2x + 8$

b) Die Gerade g_2 verläuft durch den Punkt $P_2\,(3|g(3))$ und ist parallel zu $y = 4x - 2$.

$m = 4; P_2(3|4)$ $y = m \cdot x + n \Rightarrow 4 = 4 \cdot 3 + n \Rightarrow n = -8$ $g_2(x) = 4x - 8$

c) Die Tangente g_3 berührt an der Stelle $x = 3$ den Funktionsgraphen.

$g'(3) = -1 = m; P(3|-4)$ $y = m \cdot x + n \Rightarrow -4 = -1 \cdot 3 + n \Rightarrow n = -1$ $g_3(x) = -x - 1$

d) Die Tangente g_4 berührt an der Stelle $x = 1$ den Funktionsgraphen.

$g'(1) = 3 = m; P(1|2)$ $y = m \cdot x + n \Rightarrow 2 = 3 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -1$ $g_4(x) = 3x - 1$

e) Die Gerade g_5 hat einen Anstiegswinkel $\alpha = 30°$ und verläuft durch den Punkt $P_3\,(0|g(0))$

$m = \tan(\alpha) = \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$ $P_3(0|-2)$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow -2 = 0,577 \cdot 0 + n \Rightarrow n = -2$

$g_4(x) = 0,577x - 2$ bzw. exakt: $g_4(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$

Aufgabe 7 ohne CAS (9 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto -3x^2 + 12x - 9$.
Berechnen Sie die Stelle, an welcher die Tangente den gegebenen Anstieg besitzt. Geben Sie anschließend die Tangentengleichung an.

a) $m = 12$

$12 = -6x + 12 \Rightarrow x = 0$ $h(0) = -9 \Rightarrow P(0|-9)$

$y = m \cdot x + n \Rightarrow -9 = 12 \cdot 0 + n \Rightarrow n = -9$

$t : \underline{\underline{y = 12x - 9}}$

b) $m = -6$ Analoger Rechenweg, wie a) $\Rightarrow x = 3$ und $t : \underline{\underline{y = -6x + 18}}$

c) $m = 0$ Analoger Rechenweg, wie a) $\Rightarrow x = 2$ und $t : \underline{\underline{y = 3}}$

Aufgabe 8 (2 + 2 + 2 + 3 BE + 2 Zusatzpunkte)

Die Helpter Berge sind die höchste natürliche Erhebung in unserem Bundesland. Wenn das Profil des Berges extrem stark vereinfacht wird, kann es mit folgender Funktion $h(x)$ beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{1}{288.000}x^3 + \frac{307}{180.000}x^2 - \frac{103}{1.200}x + 145, \qquad 0 \leqq x \leqq 450$$

Dabei gibt x die Entfernung in m an und y die Erhöhung über Normalhöhennull (NHN) in m.

a) Geben Sie die Höhe zu Beginn und zum Ende des Bergprofils an.

(Vergleich: Woldegk liegt ca. 112 m über NHN; Friedland liegt ca. 16 m über NHN; Neubrandenburg Innenstadt liegt ca. 20 m über NHN und der Datzeberg ca. 57 m über NHN)[1]

$h(0) = 145$ und $h(450) \approx 135,34$
Der Berg ist zu Beginn 145 m über NHN und am Ende ca. 135,34 m über NHN.

b) Bestimmen Sie, wie weit es von Beginn der Berge bis zum Höchsten Punkt auf einer Höhe von 179 m über NHN ist.

$179 = h(x) \quad \rightarrow \quad x_1 = -108,8$ liegt außerhalb des Intervalls und $x_2 = 300$
Nach 300 m ist der höchste Punkt von 179 m erreicht.

c) Bestimmen Sie den mittleren Anstieg der Berge im Intervall $[0; x_{\text{HP}}]$ und im Intervall $[x_{\text{HP}}; 450]$. Geben Sie anschließen die Anstiegswinkel an.

(Hinweis: x_{HP} ist der x-Wert des Hochpunktes, welcher in Aufgabe b) ermittelt wurde.)

Mittlerer Anstieg für $[0; 300]$: $\frac{179-145}{300-0} \approx 0,113$

Der Anstiegswinkel ist dann $\alpha = \tan^{-1}(0,113) \approx 6,4°$

Mittlerer Anstieg für $[300; 450]$: $\frac{135,34-179}{450-300} \approx -0,291$

Der Anstiegswinkel ist dann $\alpha = \tan^{-1}(-0,291) \approx -16,2°$, also ist der Winkel des Abstiegs $16,2°$

d) Zu Beginn und zum Ende des Berges soll eine Straße anschließen, welche geradlinig verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für eine der beiden Straßen.

$h'(x) = -\frac{1}{96.000}x^2 + \frac{307}{90.000}x - \frac{103}{1.200}$

Lösung 1 für $x = 0$:

$h'(0) = -\frac{103}{1.200}$ in die Gleichung $y = mx + n$ Werte einsetzen, um n zu bestimmen:

$145 = \frac{103}{1.200} \cdot 0 + n \quad \rightarrow \quad n = 145 \quad \rightarrow \quad t : y = -\frac{103}{1.200}x + 145$

Lösung 2 für $x = 450$:

$h'(450) = -\frac{3.169}{4.800}$ in die Gleichung $y = mx + n$ Werte einsetzen, um n zu bestimmen:

$135,34 = \frac{3.169}{4.800} \cdot 450 + n \quad \rightarrow \quad n \approx 432,434 \quad \rightarrow \quad t : y = -\frac{3.169}{4.800}x + 432,434$

e*) Beurteilen Sie, warum der Funktionsgraph extrem stark vereinfacht ist.

- keine Hügel zwischendurch
- Längen gerundet und teilweise viel zu kurz (der ganze Berg ist 450 m lang)
- ...

[1] Daten ermittelt durch `https://www.mapcoordinates.net/de`.

Aufgaben zu Monotonie und lokalen Extrema (23.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (3+2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(x)$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0 \mid f(0))$.

b) Geben Sie den Wertebereich von f an.

Aufgabe 2 ohne CAS (3+2 BE)

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph heißt G. Die Tangente an G im Punkt $P(1|f(1))$ heißt t, die Normale im selben Punkt heißt s.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung von t.

b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass das Dreieck, welches durch t, s und die x-Achse gebildet ist, nicht gleichseitig ist.

Aufgabe 3 ohne CAS (12 BE)

Bestimmen Sie die lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen der Funktion $f(x)$.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

b) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2 + 8$

c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

d) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x - 1$

Aufgabe 4 ohne CAS (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ keine lokalen Extremstellen besitzen kann.

a) $f(x) = x^3 + 3x$ b) $f(x) = \frac{1}{x} - 2x$ c) $f(x) = e^x + 2$

Aufgabe 5 ohne CAS (3 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$ und beziehen Sie in Ihre Argumentation auch die Verschiebung entlang der x- und der y-Achse mit ein.

$$f(x) = (x+1)^2 - 2$$

Aufgabe 6 ohne CAS (1+4 BE)

Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist.

a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist.

b) Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y-Koordinate -1.
Ermitteln Sie den Wert von k.

Aufgabe 7 (4 + 4 + 3 BE)

BMX-Fahrräder sind speziell für das Gelände ausgelegte Sportgeräte. Für den professionellen Einsatz dieser Fahrräder wird auf horizontalem Untergrund eine 3m breite Sprungschanze installiert. Im Längsschnitt der Schanze kann deren Profillinie für $x \in [-8; 0]$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{256}x^3 + \frac{3}{4}x + 2$ beschrieben werden. Abbildung 1 zeigt den zugehörigen Teil des Graphen von f.

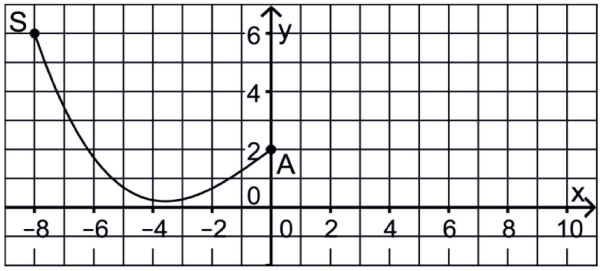


Abbildung 1: Sprungschanze

Der Startpunkt, von dem aus die Schanze durchfahren wird, wird durch den Punkt $S\,(-8 \mid f(-8))$ dargestellt, der Absprungpunkt durch $A\,(0 \mid f(0))$. Der Untergrund wird im Längsschnitt durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1m in der Wirklichkeit.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell den tiefsten Punkt der Schanze darstellt. Bestimmen Sie rechnerisch die Höhendifferenz zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt der Schanze.

b) Veranschaulichen Sie in Abbildung 1 die mittlere Steigung der Schanze zwischen Startpunkt und Absprungpunkt. Bestimmen Sie diese Steigung.

c) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Schanze im Startpunkt mit der Horizontalen einschließt.

Aufgabe 8 (10 BE)

Im Rahmen eines Unterrichtsprojekts wurden unterschiedliche Kugelbahnkörper gefertigt und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersucht. Zwei dieser Bahnkörper sind in Abbildung 2 schematisch dargestellt.

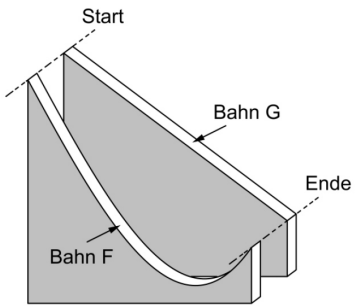


Abbildung 2: Kugelbahnkörper

Im Längsschnitt jeder der Bahnen F und G

- kann die Profillinie der Bahn modellhaft mithilfe einer Funktion beschrieben werden;
- wird der Startpunkt, von dem aus die Kugel die Bahn durchläuft, durch den Punkt $S(0 \mid 2)$ dargestellt, der Endpunkt durch den Punkt $E\left(2 \mid \frac{1}{2}\right)$.

Der horizontale Untergrund, auf dem die beiden Bahnkörper stehen, wird jeweils durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die Beschreibung der Profillinie der Bahn F erfolgt mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f(x) = \frac{3}{11}x^3 - \frac{81}{44}x + 2$.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass der tiefste Punkt der Bahn F unterhalb ihres Endpunktes liegt.

b) Im fallenden Abschnitt der Bahn F gibt es einen Punkt, der auf der Höhe des Endpunkts liegt. Bestimmen Sie für diesen Punkt den Abstand vom Endpunkt.

c) Bestimmen Sie die Lage desjenigen Punkts der Bahn F, in dem diese das größte Gefälle hat.

d) Zeichnen Sie den Graphen von f für $0 \leqq x \leqq 2$

Die Bahn G verläuft gerade. Die Beschreibung ihrer Profillinie erfolgt mithilfe einer Funktion g.

e) Zeichnen Sie den Graphen von g für $0 \leqq x \leqq 2$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe d) ein und zeigen Sie, dass $g(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ gilt.

Aufgaben zu Monotonie und lokalen Extrema (23.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (3+2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(x)$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0 \mid f(0))$.

$f(0) = 3 - 2 \cdot \sin(0) = 3 \quad \rightarrow \quad (0|3)$

$f'(x) = -2 \cdot \cos(x) \qquad f'(0) = -2$

$y = m \cdot x + n \quad \Leftrightarrow \quad 3 = -2 \cdot 0 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = 3$

$t(x) = -2 \cdot x + 3$

b) Geben Sie den Wertebereich von f an.

Der Wertebereich von $\sin(x)$ ist $[-1; 1]$
Der Wertebereich von $-2 \cdot \sin(x)$ ist $[-2; 2]$
Der Wertebereich von $3 - 2 \cdot \sin(x)$ ist also $[1; 5]$

Aufgabe 2 ohne CAS (3+2 BE)

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph heißt G. Die Tangente an G im Punkt $P(1|f(1))$ heißt t, die Normale im selben Punkt heißt s.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung von t.

$f(1) = 1 + 2 = 3 \quad \rightarrow \quad P(1|3)$

$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \rightarrow \quad f'(1) = -2$

$y = m \cdot x + n \quad \Leftrightarrow \quad 3 = -2 \cdot 1 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = 5$

$t(x) = -2 \cdot x + 5$

b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass das Dreieck, welches durch t, s und die x-Achse gebildet ist, nicht gleichseitig ist.

Der Winkel zwischen Tangente und Normalen ist 90°, bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel 60° groß. Daher funktioniert es nicht.

Aufgabe 3 ohne CAS (12 BE)

Bestimmen Sie die lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen der Funktion $f(x)$.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \qquad f''(x) = 6x - 12$

$0 = 3x^2 - 12x + 9 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 4x + 3 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$ und $x_2 = 3$

$f''(1) = -6 < 0 \quad \rightarrow \quad$ an der Stelle $x_1 = 1$ ist ein lokales Maximum

$f(1) = 0 \quad \rightarrow \quad H(1 \mid 0)$

$f''(3) = 6 > 0 \quad \rightarrow \quad$ an der Stelle $x_2 = 3$ ist ein lokales Minimum

$f(3) = -4 \quad \rightarrow \quad T(3 \mid -4)$

b) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2 + 8$

$f'(x) = \frac{4}{9}x^3 - 4x \qquad f''(x) = \frac{4}{3}x^2 - 4$

$0 = \frac{4}{9}x^3 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4x \cdot (\frac{1}{9}x^2 - 1) \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = -3$ und $x_3 = 3$

$f''(0) = -4 < 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_1 = 0$ ist ein lokales Maximum

$f(0) = 8 \quad \rightarrow \quad H(0 \mid 8)$

$f''(-3) = 8 > 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_2 = -3$ ist ein lokales Minimum

$f(-3) = -1 \quad \rightarrow \quad T_1(-3 \mid -1)$

$f''(3) = 8 > 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_3 = 3$ ist ein lokales Minimum

$f(3) = -1 \quad \rightarrow \quad T_2(3 \mid -1)$

c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

$f'(x) = 4x^3 - 12x \qquad f''(x) = 12x^2 - 12$

$0 = 4x^3 - 12x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4x \cdot (x^2 - 3) \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}$ und $x_3 = \sqrt{3}$

$f''(0) = -12 < 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_1 = 0$ ist ein lokales Maximum

$f(0) = 5 \quad \rightarrow \quad H(0 \mid 5)$

$f''(-\sqrt{3}) = 24 > 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_2 = -\sqrt{3}$ ist ein lokales Minimum

$f(-\sqrt{3}) = -4 \quad \rightarrow \quad T_1(-\sqrt{3} \mid -4)$

$f''(\sqrt{3}) = 24 > 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x_3 = \sqrt{3}$ ist ein lokales Minimum

$f(\sqrt{3}) = -4 \quad \rightarrow \quad T_2(\sqrt{3} \mid -4)$

d) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \qquad f''(x) = x - 2$

$0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 4x + 4 \quad \rightarrow \quad x = 2$

$f''(2) = 0 \quad \rightarrow$ an der Stelle $x = 2$ liegt kein lokales Extremum vor.

Vorzeichenwechsel als Gegenprobe: $f'(1) = \frac{1}{2}$ und $f'(3) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel

Aufgabe 4 ohne CAS (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ keine lokalen Extremstellen besitzen kann.

a) $f(x) = x^3 + 3x$

$f'(x) = 3x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad 0 = 3x^2 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 1$ hat keine Lösung

Somit gibt es kein Extremum.

b) $f(x) = \frac{1}{x} - 2x$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{x^2} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 = \frac{1}{x^2}$ hat keine Lösung

Somit gibt es kein Extremum.

c) $f(x) = e^x + 2$

$f'(x) = e^x$ und diese Funktion ist immer größer 0, egal was für x eingesetzt wird. Also gibt es keine Nullstelle der ersten Ableitung und somit keine Extremstelle der Funktion.

Aufgabe 5 ohne CAS (3 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$ und beziehen Sie in Ihre Argumentation auch die Verschiebung entlang der x- und der y-Achse mit ein.

$$f(x) = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$$

$f'(x) = 2x + 2$. Diese lineare Funktion ist monoton steigend. Sie hat eine Nullstelle bei $x = -1$. Daher gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty; -1)$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-1, \infty)$.

Das heißt: bis $x = -1$ fällt die Funktion $f(x)$ und ab $x = -1$ steigt die Funktion $f(x)$ streng monoton.

Die Verschiebung auf der y-Achse beeinflusst gar nichts, da sie beim Ableiten als Konstante wegfällt. Daher ist nur die Verschiebung auf der x-Achse relevant und durch $(x+1)^2$ wurde die Funktion um 1 Längeneinheit nach links verschoben. Deshalb ändert sich die Monotonie bei $x = -1$.

Aufgabe 6 ohne CAS (1+4 BE)

Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist.

a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist.

$f'(x) = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot k \cdot x = 2x \cdot (2 \cdot x^2 - k)$

b) Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y-Koordinate -1.
Ermitteln Sie den Wert von k.

Durch a) ist die Gleichung $0 = f'(x)$ besser lösbar, da nur die beiden Faktoren betrachtet werden. Daher ist $x_1 = 0$ und x_2 und x_3 ergeben sich aus der Lösung der Gleichung $0 = 2 \cdot x^2 - k \Leftrightarrow \frac{k}{2} = x^2 \Leftrightarrow x_2 = -\sqrt{\frac{k}{2}}$ und $x_3 = \sqrt{\frac{k}{2}}$

$f''(x) = 12 \cdot x^2 - 2 \cdot k$ Da $f''(0) = -2k < 0$ ist, ist bei $x_1 = 0$ somit der Hochpunkt. Daher sind bei x_2 und x_3 die beiden Tiefpunkte.

Für die y-Koordinate eines Tiefpunktes gilt: $f\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = \frac{k^2}{4} - k \cdot \frac{k}{2} = -\frac{k^2}{4}$

$-1 = -\frac{k^2}{4} \Leftrightarrow 4 = k^2$ Also ist $k = 2$ (da $k = -2$ entfällt, weil k positiv sein soll).

Aufgabe 7 (4 + 4 + 3 BE)

BMX-Fahrräder sind speziell für das Gelände ausgelegte Sportgeräte. Für den professionellen Einsatz dieser Fahrräder wird auf horizontalem Untergrund eine 3m breite Sprungschanze installiert. Im Längsschnitt der Schanze kann deren Profillinie für $x \in [-8; 0]$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{256}x^3 + \frac{3}{4}x + 2$ beschrieben werden. Abbildung 1 zeigt den zugehörigen Teil des Graphen von f.

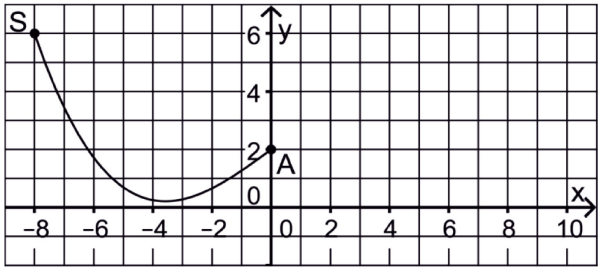


Abbildung 1: Sprungschanze

Der Startpunkt, von dem aus die Schanze durchfahren wird, wird durch den Punkt $S\,(-8 \mid f(-8))$ dargestellt, der Absprungpunkt durch $A\,(0 \mid f(0))$. Der Untergrund wird im Längsschnitt durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1m in der Wirklichkeit.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell den tiefsten Punkt der Schanze darstellt. Bestimmen Sie rechnerisch die Höhendifferenz zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt der Schanze.

Ableitungen bestimmen: $f'(x) = -\frac{15}{256}x^2 + \frac{3}{4}$ $\quad f''(x) = -\frac{15}{128}x$

potentielle Extremstellen ermitteln:

$0 = f'(x) \quad \rightarrow \quad x_1 \approx -3,5777$ und $x_2 \approx 3,5777$ (liegt aber nicht im Intervall $[-8; 0]$

Art des Extremums bestimmen:

$f''(-3,5777) \approx 0,42 > 0$ also liegt an der Stelle $x = -3,5777$ tatsächlich ein Minimum vor.

Punkte für die Höhendifferenz bestimmen (Tiefpunkt und Startpunkt):

$f(-8) = 6$, also $S(-8 \mid 6)$ und $f(-3,5777) \approx 0,2111$, also $T(-3,5777 \mid 0,2111)$.

Die Höhendifferenz ist $6m - 0,2111m = 5,7889m$

b) Veranschaulichen Sie in Abbildung 1 die mittlere Steigung der Schanze zwischen Startpunkt und Absprungpunkt. Bestimmen Sie diese Steigung.

In der Zeichnung muss die Strecke zwischen S und A eingezeichnet werden.

Die Steigung ist die mittlere Änderung zwischen S und A. Also $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-6}{0-(-8)} = -\frac{1}{2}$

c) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Schanze im Startpunkt mit der Horizontalen einschließt.

$f'(-8) = -3 \quad \rightarrow \quad \tan(\alpha) = -3 \quad \rightarrow \quad \alpha \approx -71,6°$, also etwa $71,6$ Grad.

Aufgabe 8 (10 BE)

Im Rahmen eines Unterrichtsprojekts wurden unterschiedliche Kugelbahnkörper gefertigt und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersucht. Zwei dieser Bahnkörper sind in Abbildung 2 schematisch dargestellt.

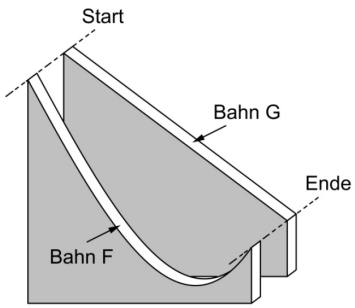


Abbildung 2: Kugelbahnkörper

Im Längsschnitt jeder der Bahnen F und G

- kann die Profillinie der Bahn modellhaft mithilfe einer Funktion beschrieben werden;
- wird der Startpunkt, von dem aus die Kugel die Bahn durchläuft, durch den Punkt $S(0 \mid 2)$ dargestellt, der Endpunkt durch den Punkt $E\left(2 \mid \frac{1}{2}\right)$.

Der horizontale Untergrund, auf dem die beiden Bahnkörper stehen, wird jeweils durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die Beschreibung der Profillinie der Bahn F erfolgt mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f(x) = \frac{3}{11}x^3 - \frac{81}{44}x + 2$.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass der tiefste Punkt der Bahn F unterhalb ihres Endpunktes liegt.

$f'(x) = \frac{9}{11}x^2 - \frac{81}{44}$ $\quad f''(x) = \frac{18}{11}x$ $\quad f'''(x) = \frac{18}{11}$

$0 = f'(x) \quad \rightarrow \quad x_1 = -1,5$ und $x_2 = 1,5$ x_1 entfällt, da es kleiner 0 ist.

$f''(1,5) \approx 2,45 > 0 \quad \rightarrow \quad$ bei $x_2 = 1,5$ liegt ein lokales Minimum vor.

$f(1,5) \approx 0,159 \quad \rightarrow \quad T(1,5 \mid 0,159)$ ist der tiefste Punkt der Bahn F.

b) Im fallenden Abschnitt der Bahn F gibt es einen Punkt, der auf der Höhe des Endpunkts liegt. Bestimmen Sie für diesen Punkt den Abstand vom Endpunkt.

Der fallende Abschnitt ist nach Aufgabe a) das Intervall $[0; 1,5]$

$\frac{1}{2} = f(x) \quad \rightarrow \quad x_1 \approx -2,94$ (entfällt), $x_2 \approx 0,9365$ und $x_3 = 2$ (entfällt)

Also ist der Punkt etwa $2 - 0,9365 = 1,0635$ m vom Endpunkt entfernt.

c) Bestimmen Sie die Lage desjenigen Punkts der Bahn F, in dem diese das größte Gefälle hat.

Gesucht ist also das Minimum des Anstiegs, also der 1. Ableitung $\rightarrow$ 2. Ableitung

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \qquad f'''(0) = \frac{18}{11} > 0$, also ist dies das Minimum der 2. Ableitung.

$f(0) = 2 \quad \rightarrow \quad$ Im Punkt $S(0 \mid 2)$ ist das größte Gefälle.

d) Zeichnen Sie den Graphen von f für $0 \leqq x \leqq 2$

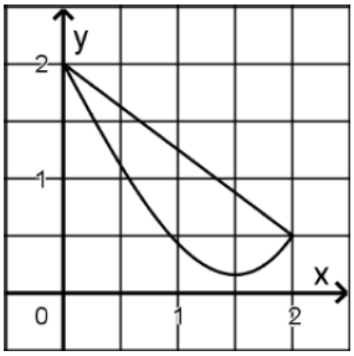


Abbildung 3: Lösung für d) und e)

Die Bahn G verläuft gerade. Die Beschreibung ihrer Profillinie erfolgt mithilfe einer Funktion g.

e) Zeichnen Sie den Graphen von g für $0 \leqq x \leqq 2$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe d) ein und zeigen Sie, dass $g(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ gilt.

Zeichnung siehe oben.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}5-2}{2-0} = -\frac{3}{4}$

$y = m \cdot x + n \quad \Rightarrow \quad 2 = -\frac{3}{4} \cdot 0 + n \quad \rightarrow \quad n = 2$

$\Rightarrow \quad g(x) = -\frac{3}{4}x + 2$

Aufgaben zu Krümmungsverhalten und Wendepunkte (29.09.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (9 BE)

Bestimmen Sie die lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte und die Wendepunkte des Graphen der Funktion $f(x)$ mit $f(x) = (x-1) \cdot (x+2)^2$.

Aufgabe 2 ohne CAS (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die gegebenen Funktionen $g(x)$ nur konvex oder nur konkav sind.

a) $g(x) = x^2 + 3x - 4$ b) $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 38x + \pi$

Aufgabe 3 ohne CAS (2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 1$ und $x \in \mathbb{R}$

1. Bestimmen Sie die x-Koordinate der Punkte, in denen der Graph von f die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schneidet.
2. Unter den Tangenten an den Graphen von f hat eine die kleinste Steigung. Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

Aufgabe 4 ohne CAS (2 + 2 BE)

Gegeben ist eine Funktion f, die für jedes $x \in [a; b]$ eine Ableitung $f'(x)$ hat.
Es gilt $f(a) = f(b) = 0$ sowie $f(x) > 0$ für $x \in (a; b)$.

a) Entscheiden Sie für jede der beiden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.
   - f besitzt mindestens ein Extremum in $(a; b)$.
   - f besitzt mindestens eine Nullstelle in $(a; b)$.

b) Begründen Sie, dass die Anzahl der Extrema von f für $x \in (a; b)$ ungerade sein muss.

Aufgabe 5 (2 + 2 BE)

Es wird die folgende Aussage betrachtet:
„Gilt $f'(a) = 0$, dann liegt der Punkt $P(a \mid f(a))$ des Graphen von f auf der x-Achse.“

a) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass diese Aussage falsch ist.

b) Formulieren Sie eine sinnvolle wahre Aussage, die in folgender Weise beginnt:
„Wenn $f'(a) = 0$ ist, dann ...“

Aufgabe 6 (3 + 3 + 4 + 2 BE)

Papierflieger verlassen die Hand eines Werfers in einer bestimmten Abwurfhöhe, unter einem bestimmten Abwurfwinkel und mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit. Die Flugkurven können abhängig von diesen drei Bedingungen sowie von der jeweiligen Bauweise des Papierfliegers unterschiedlich verlaufen. Im Folgenden sollen drei Typen von Flugkurven unterschieden werden, die in der Abbildung schematisch dargestellt sind.
Wird die Größe der betrachteten Papierflieger vernachlässigt, können die Flugkurven bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen x-Achse entlang des horizontalen Bodens und dessen y-Achse durch den Abwurfpunkt verläuft, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Im Folgenden soll der x-Wert der horizontalen Entfernung des Papierfliegers vom Abwurfpunkt entsprechen, der zugehörige Funktionswert der Flughöhe (jeweils in Metern).

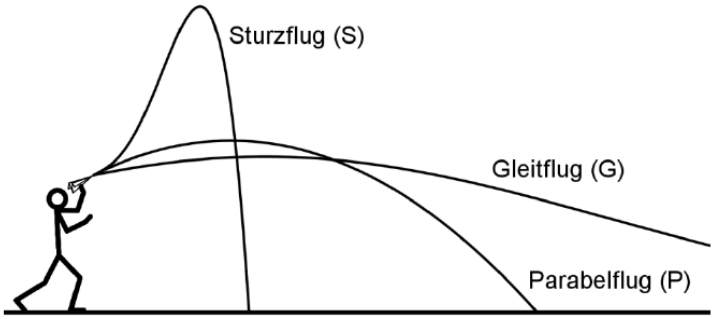


Abbildung 1: Flugkurven

Ein Papierflieger bewegt sich entlang einer Flugkurve vom Typ S. Diese kann mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s mit $s(x) = -x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$ beschrieben werden.

a) Geben Sie die Abwurfhöhe an und zeigen Sie, dass die Flugweite etwa 2,27 m beträgt.

b) Zeigen Sie, dass der Papierflieger seine maximale Flughöhe besitzt, wenn seine horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt etwa 1,5 m beträgt. Geben Sie diese Flughöhe an.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte des Graphen von s und geben Sie die jeweilige Steigung des Graphen von s in den Wendepunkten an.

d) Beschreiben Sie die Bedeutung des Wendepunkts mit der größeren x-Koordinate im Hinblick auf die Steigung der Flugkurve des Papierfliegers.

Aufgabe 7 (3 + 2 + 3 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen v_t mit

$$v_t(x) = \left(\frac{x}{t}\right)^2 \cdot (x-t)^2 + 1 \text{ mit } t \in \mathbb{R}^+$$

a) Nennen Sie drei Eigenschaften, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von v_8.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von v_t genau zwei Wendepunkte hat, deren y-Koordinaten den Wert $\frac{1}{36}t^2 + 1$ haben.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \sqrt[4]{v_8(x)}$.

d) Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

- Für keinen Wert von x ist der Funktionswert von f größer als der von v_8.
- Das Monotonieverhalten von f stimmt mit dem von v_8 überein.

e) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x - \sqrt{2}\right) - f(x)\right) = 0$
Beschreiben Sie die grafische Bedeutung dieser Aussage.

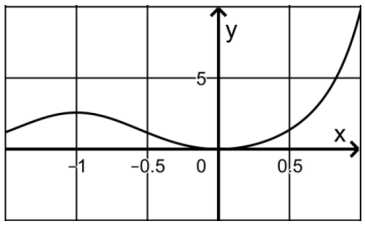
Aufgabe 8 (2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{5}{2}x^2 \cdot (2x+3)$

a) Zeichnen Sie den Graphen von g für $-1,5 \leqq x \leqq 0,5$ in ein Koordinatensystem ein.

b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.



c) Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to \infty$ an und beschreiben Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt.

d) Zeigen Sie: $h'(x) = 10x \cdot (1+x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ ist ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h.

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h.

f) Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1 \leqq x \leqq 0$.

g) Es gilt: $(h(1) - g(1)) \cdot (h(2) - g(2)) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1 < x < 2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgaben zu Krümmungsverhalten und Wendepunkte (26.09.2019)

H. Wuschke

Aufgabe 1 ohne CAS (9 BE)

Bestimmen Sie die lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte und die Wendepunkte des Graphen der Funktion $f(x)$ mit $f(x) = (x-1)\cdot(x+2)^2$.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \qquad f'(x) = 3x^2 + 6x \qquad f''(x) = 6x + 6 \qquad f'''(x) = 6$

Extrempunkte:

$0 = 3x^2 + 6x = 3x \cdot (x+2) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

Art des Extremums?

$f''(0) = 6 > 0 \qquad \rightarrow$ Bei $x_1 = 0$ ist ein lokales Minimum.

$f''(-2) = -6 < 0 \qquad \rightarrow$ Bei $x_2 = -2$ ist ein lokales Maximum.

Koordinaten bestimmen

$f(0) = -4 \quad \rightarrow \quad T(0|-4) \qquad f(-2) = -8 + 12 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad H(-2|0)$

Wendepunkt:

$0 = 6x + 6 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1$

Ist es ein Wendepunkt?

$f'''(-1) = 6 \neq 0 \quad \rightarrow$ Bei $x = -1$ liegt ein Wendpunkt vor.

Koordinaten bestimmen

$f(-1) = -1 + 3 - 4 = -2 \quad \rightarrow \quad W(-1|-2)$

Aufgabe 2 ohne CAS (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die gegebenen Funktionen $g(x)$ nur konvex oder nur konkav sind.

a) $g(x) = x^2 + 3x - 4$

$g'(x) = 2x + 3$ und $g''(x) = 2$

Also ist $g''(x) > 0$ (immer), deshalb ist die Funktion $g(x)$ nur konvex.

b) $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 38x + \pi$

$g'(x) = -\frac{1}{2}x - 38$ und $g''(x) = -\frac{1}{2}$

Also ist $g''(x) < 0$ (immer), deshalb ist die Funktion $g(x)$ nur konkav.

Aufgabe 3 ohne CAS (2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 1$ und $x \in \mathbb{R}$

1. Bestimmen Sie die x-Koordinate der Punkte, in denen der Graph von f die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schneidet.

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x + 1 \quad | \quad -1 \\ 0 &= \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x \quad | \quad (\tfrac{1}{3}x \text{ ausklammern}) \\ 0 &= \tfrac{1}{3}x \cdot (x^2 - 4) \end{aligned}$$

Nun gilt der Satz: Ein Produkt ist dann Null, wenn ein Faktor Null ist. $\rightarrow$ $\underline{\underline{x_1 = 0}}$

$0 = x^2 - 4 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x_2 = -2}}$ und $\underline{\underline{x_3 = 2}}$

2. Unter den Tangenten an den Graphen von f hat eine die kleinste Steigung. Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

   Gesucht ist also der kleinste Anstieg, also das Minimum der ersten Ableitung.

   $f'(x) = x^2 - \frac{4}{3}$ und $f''(x) = 2x$ und $f'''(x) = 2$

   $0 = f''(x)$ bzw. $0 = 2x \quad \rightarrow \quad x = 0$

   Weil $f'''(0) = 2 > 0$ ist, ist dies ein lokales Minimum. Der kleinste Anstieg ist also an der Stelle $x = 0$. Nun muss das noch in die 1. Ableitung eingesetzt werden, um angeben zu können, wie groß der Anstieg der Tangente ist.

   $f'(0) = -\frac{4}{3}$ Also hat die Tangente eine Steigung von $-\frac{4}{3}$.

Aufgabe 4 ohne CAS (2 + 2 BE)

Gegeben ist eine Funktion f, die für jedes $x \in [a; b]$ eine Ableitung $f'(x)$ hat.
Es gilt $f(a) = f(b) = 0$ sowie $f(x) > 0$ für $x \in (a; b)$.

a) Entscheiden Sie für jede der beiden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

   - f besitzt mindestens ein Extremum in $(a; b)$.
     Das folgt aus dem Satz von Rolle und ist somit wahr.
   - f besitzt mindestens eine Nullstelle in $(a; b)$.
     Diese Aussage ist falsch, weil $f(x) > 0$ sein soll und somit keine Nullstelle mehr besitzen kann.

b) Begründen Sie, dass die Anzahl der Extrema von f für $x \in (a; b)$ ungerade sein muss.
   Maxima und Minima von f können in $(a; b)$ nur im Wechsel auftreten.
   Da $f(a) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x > a$ gilt, muss rechts von a zuerst ein Maximum kommen, dann (falls es eines gibt) ein Minimum, dann wieder ein Maximum etc.
   Da $f(x) > 0$ für $x < b$ und $f(b) = 0$ gilt, muss das letzte Extremum in $(a; b)$ links von b ebenfalls ein Maximum sein.
   Also ist die Anzahl der Extrema in $(a; b)$ gleich 1 oder 3 oder ..., jedenfalls ungerade.

Aufgabe 5 (2 + 2 BE)

Es wird die folgende Aussage betrachtet:
„Gilt $f'(a) = 0$, dann liegt der Punkt $P(a \mid f(a))$ des Graphen von f auf der x-Achse."

a) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass diese Aussage falsch ist.
   Dies kann man mit sehr vielen Gegenbeispielen zeigen.
   Zum Beispiel: $f(x) = x^2 + 2$ dort ist $f'(x) = 2x$ und damit ist $f'(0) = 0$, aber $f(0) = 2$ bzw. der Punkt $P(0|2)$ (liegt nicht auf der x-Achse).

b) Formulieren Sie eine sinnvolle wahre Aussage, die in folgender Weise beginnt:
   „Wenn $f'(a) = 0$ ist, dann ..."
   „... besitzt der Graph im Punkt $P(a|f(a))$ eine waagerechte Tangente." oder
   „... ist der Punkt $P(a|f(a))$ ein Extrem- oder Sattelpunkt." oder
   „... liegt der Punkt $P(a|f'(a))$ des Graphen der Ableitung auf der x-Achse."

Aufgabe 6 (3 + 3 + 4 + 2 BE)

Papierflieger verlassen die Hand eines Werfers in einer bestimmten Abwurfhöhe, unter einem bestimmten Abwurfwinkel und mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit. Die Flugkurven können abhängig von diesen drei Bedingungen sowie von der jeweiligen Bauweise des Papierfliegers unterschiedlich verlaufen. Im Folgenden sollen drei Typen von Flugkurven unterschieden werden, die in der Abbildung schematisch dargestellt sind.
Wird die Größe der betrachteten Papierflieger vernachlässigt, können die Flugkurven bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen x-Achse entlang des horizontalen Bodens und dessen y-Achse durch den Abwurfpunkt verläuft, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Im Folgenden soll der x-Wert der horizontalen Entfernung des Papierfliegers vom Abwurfpunkt entsprechen, der zugehörige Funktionswert der Flughöhe (jeweils in Metern).

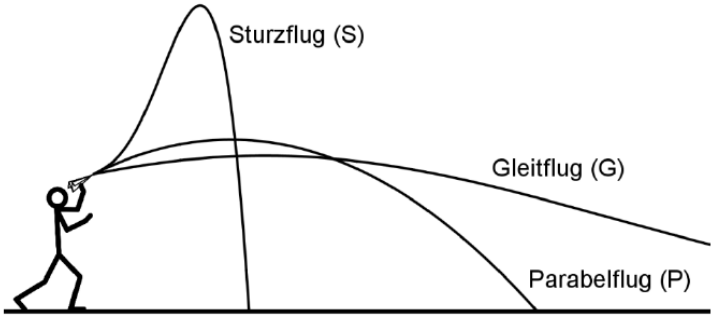


Abbildung 1: Flugkurven

Ein Papierflieger bewegt sich entlang einer Flugkurve vom Typ S. Diese kann mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s mit $s(x) = -x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$ beschrieben werden.

a) Geben Sie die Abwurfhöhe an und zeigen Sie, dass die Flugweite etwa 2,27 m beträgt.

$s(0) = 2 \quad \rightarrow \quad$ Abwurfhöhe: 2 m

$0 = s(x) \quad \rightarrow \quad x_1 \approx -0,83$ (entfällt, da kleiner 0) und $x_2 \approx 2,27$ (Flugweite)

b) Zeigen Sie, dass der Papierflieger seine maximale Flughöhe besitzt, wenn seine horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt etwa 1,5 m beträgt. Geben Sie diese Flughöhe an.

$s'(x) = -4x^3 + 6x^2 + \frac{1}{2}$ und $s''(x) = -12x^2 + 12x$

$0 = s'(x) \quad \rightarrow \quad x \approx 1,55$

$s''(1,55) = -10,23 < 0 \quad \rightarrow \quad$ an der Stelle $x = 1,55$ ist ein lokales Maximum. Schlecht gerundet könnte man sagen, dass es etwa 1,5 m vom Abwurfpunkt entfernt ist.

$s(1,55) \approx 4,45 \quad \rightarrow \quad$ Die maximale Flughöhe beträgt etwa 4,45 m.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte des Graphen von s und geben Sie die jeweilige Steigung des Graphen von s in den Wendepunkten an.

$s'''(x) = -24x + 12$

$0 = s''(x) \quad \rightarrow \quad x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

$s'''(0) = 12 \neq 0$ und $s'''(1) = -12 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ An beiden Stellen liegt ein Wendepunkt vor.

$s(0) = 2 \quad \rightarrow \quad W_1(0|2)$

$s'(0) = \frac{1}{2} \quad$ Also ist $\frac{1}{2}$ die Steigung im Wendepunkt W_1.

$s(1) = 3,5 \quad \rightarrow \quad W_2(1|3,5)$

$s'(1) = 2,5 \quad$ Also ist 2,5 die Steigung im Wendepunkt W_2.

d) Beschreiben Sie die Bedeutung des Wendepunkts mit der größeren x-Koordinate im Hinblick auf die Steigung der Flugkurve des Papierfliegers.

Im Wendepunkt W_2 (Wendepunkt mit der größeren x-Koordinate) ist die Steigung am größten. Das heißt, dass sie danach nur noch abnimmt.

Aufgabe 7 (3 + 2 + 3 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen v_t mit

$$v_t(x) = \left(\frac{x}{t}\right)^2 \cdot (x-t)^2 + 1 \text{ mit } t \in \mathbb{R}^+$$

a) Nennen Sie drei Eigenschaften, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.
Die Graphen bestehen aus Punkten mit positiven y-Koordinaten, haben genau drei Extrempunkte und sind symmetrisch bezüglich einer Parallele zur y-Achse. (weitere Eigenschaften möglich)

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von v_8.
$v_8'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0; x_2 = 4$ und $x_3 = 8$
$v_8''(4) = -1 < 0$ und $v_8(4) = 5 \qquad \rightarrow \qquad H(4 \mid 5)$

c) Zeigen Sie, dass der Graph von v_t genau zwei Wendepunkte hat, deren y-Koordinaten den Wert $\frac{1}{36}t^2 + 1$ haben.
$v_t''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6}$ und $x_2 = \frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}$
$v_t'''\left(\frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6}\right) = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{t} \neq 0 \qquad v_t'''\left(\frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}\right) = -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{t} \neq 0$
$\rightarrow$ beide Wendepunkte existieren.
$v_t\left(\frac{(\sqrt{3}+3)\cdot t}{6}\right) = \frac{t^2}{36} + 1 = v_8\left(\frac{-(\sqrt{3}-3)\cdot t}{6}\right)$

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \sqrt[4]{v_8(x)}$.

d) Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

- Für keinen Wert von x ist der Funktionswert von f größer als der von v_8.

  $f(x) > v_8(x) \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow}$ falsche Aussage. Daher ist also der Funktionswert von f für keinen Wert von x größer als die Funktionswerte von v_8.

- Das Monotonieverhalten von f stimmt mit dem von v_8 überein.

  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{t}{2}; x_2 = t; x_3 = 0$
  Das sind auch die Extremstellen von $v_t(x)$.
  Die Wurzelfunktion verändert die Monotonie einer Funktion nicht und da die Extremstellen an den gleichen Stellen sind, müssen auch die Monotoniebereiche gleich sein.

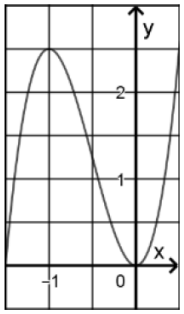
e) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x - \sqrt{2}\right) - f(x)\right) = 0$
Beschreiben Sie die grafische Bedeutung dieser Aussage.

Die Gerade $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \sqrt{2}$ ist eine Asymptote für die Funktion $f(x)$.

Aufgabe 8 (2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 BE)

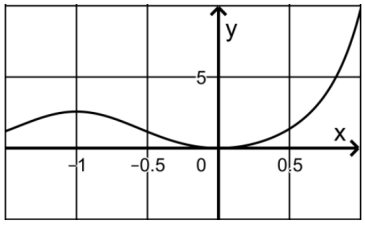
Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{5}{2}x^2 \cdot (2x+3)$

a) Zeichnen Sie den Graphen von g für $-1,5 \leqq x \leqq 0,5$ in ein Koordinatensystem ein.



b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.
Wendepunkt graphisch bestimmen: $W(-0,5|1,25)$
Es gilt $m = \tan(\alpha) = g'(x_0)$ also $g'(-0,5) = -3,75$ somit ist $\tan(\alpha) = -3,75$ bzw. $\alpha = \tan^{-1}(-3,75) \approx -75,1°$ (an Gradmaß im Rechner denken)

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.



c) Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to \infty$ an und beschreiben Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt.

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$, also nähert sich der Funktionsgraph im negativen Bereich immer näher der x-Achse an.

d) Zeigen Sie: $h'(x) = 10x \cdot (1+x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ ist ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h.

$h'(x) = 10x \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 5x^2 \cdot 2x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} = e^{\frac{2}{3}x^3} \cdot (10x + 10x^4) = e^{\frac{2}{3}x^3} \cdot 10x \cdot (1+x^3)$

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h.

$0 = h'(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$ und $x_2 = 0$
$h''(-1) = -30 \cdot e^{-\frac{2}{3}} < 0 \quad \to \quad x_{max} = -1 \quad \to \quad h(-1) = 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}} \quad \to \quad H\left(-1 \mid 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}}\right)$

$h''(0) = 10 > 0 \quad \to \quad x_{min} = 0 \quad \to \quad h(0) = 0 \quad \to \quad T(0|0)$

f) Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1 \leqq x \leqq 0$.

Mittlere Änderungsrate von g: $\frac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)} = -\frac{5}{2}$

Mittlere Änderungsrate von h: $\frac{h(0)-h(-1)}{0-(-1)} = -5 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$

$\frac{-\frac{5}{2}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}} \approx 0,9739 \quad \rightarrow \quad$ also weicht die mittlere Änderungsrate von g ca. 2,61% von h im Bereich $-1 \leqq x \leqq 0$ ab.

g) Es gilt: $(h(1) - g(1)) \cdot (h(2) - g(2)) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1 < x < 2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Das Produkt ist negativ, also müssen beide Faktoren ein anderes Vorzeichen haben. Im ersten Funktion wird die Differenz von h bzgl. g an der Stelle $x = 1$ berechnet und beim zweiten Faktor an der Stelle $x = 2$. Also müssen beide Funktionen im Intervall $(1; 2)$ mindestens einmal schneiden.

Aufgaben zu Funktionsuntersuchung (21.10.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (je 8 BE)

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f.

a) $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x$

b) $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2(x+3)$

c) $f : x \mapsto x^4 - 2x^2$

d) $f : x \mapsto 2x^3 - 6x$

e) $f : x \mapsto (x-1) \cdot (x+2)^2$

f) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$

g) $f : x \mapsto (x+1) \cdot e^{-x}$

h) $f : x \mapsto 2x \cdot e^{1-x}$

i) $f : x \mapsto \frac{1}{4}e^{2x} \cdot (x^2 - 2)$

Aufgabe 2 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x$.
Berechnen Sie den Abstand zwischen Hoch- und Tiefpunkt.

Aufgaben zu Funktionsuntersuchung (21.10.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (je 8 BE)

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f.

a) $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-4,85|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(1,85|0)$

Extrempunkte: $H(-3|27)$ und $T(1|-5)$

Wendepunkt: $W(-1|11)$

b) $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2(x+3)$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y\left(0|\frac{3}{2}\right)$; $\quad S_{x_1}(-3|0)$; $\quad S_{x_2}(1|0)$

Extrempunkte: $H\left(-\frac{5}{3}|\frac{128}{27}\right)$ und $T(1|0)$

Wendepunkt: $W\left(-\frac{1}{3}|\frac{64}{27}\right)$

c) $f : x \mapsto x^4 - 2x^2$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}; y \geqq -1$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: achsensymmetrisch $(f(x) = f(-x))$

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-\sqrt{2}|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(\sqrt{2}|0)$

Extrempunkte: $T_1(-1|-1)$ und $H(0|0)$ und $T_2(1|-1)$

Wendepunkt: $W_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}|-\frac{5}{9}\right)$ und $W_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|-\frac{5}{9}\right)$

d) $f : x \mapsto 2x^3 - 6x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: punktsymmetrisch $(f(-x) = -f(x))$

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-\sqrt{3}|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(\sqrt{3}|0)$

Extrempunkte: $H(-1|4)$ und $T(1|-4)$

Wendepunkt: $W(0|0)$

e) $f : x \mapsto (x-1)\cdot(x+2)^2$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-4)$; $\quad S_{x_1}(-2|0)$; $\quad S_{x_2}(1|0)$

Extrempunkte: $H(-2|0)$ und $T(0|-4)$

Wendepunkt: $W(-1|-2)$

f) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: punktsymmetrisch

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_{x_1}(-2|0)$; $\quad S_{x_2}(0|0)$; $\quad S_{x_3}(2|0)$

Extrempunkte: $H\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid \frac{16\cdot\sqrt{3}}{27}\right)$ und $T\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{16\cdot\sqrt{3}}{27}\right)$

Wendepunkt: $W(0|0)$

g) $f : x \mapsto (x+1)\cdot e^{-x}$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}; y \leqq 1$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|1)$; $\quad S_x(-1|0)$

Extrempunkte: $H(0|1)$

Wendepunkt: $W\left(1 \mid \frac{2}{e}\right)$

h) $f : x \mapsto 2x\cdot e^{1-x}$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}; y \leqq 2$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$; $\quad S_x(0|0)$

Extrempunkte: $H(1|2)$

Wendepunkt: $W\left(2 \mid \frac{4}{e}\right)$

i) $f : x \mapsto \frac{1}{4}e^{2x}\cdot(x^2-2)$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, Wertebereich: $y \in \mathbb{R}; y \geqq -\frac{e^2}{4}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Symmetrie: keine Symmetrie

Achsenschnittpunkte: $S_y\left(0 \mid -\frac{1}{2}\right)$; $\quad S_{x_1}(-\sqrt{2}|0)$; $\quad S_{x_2}(\sqrt{2}|0)$

Extrempunkte: $T\left(1 \mid -\frac{e^2}{4}\right)$

Wendepunkt: $W_1(-2,58|0,007)$; $\quad W_2(0,58|-1,33)$

Aufgabe 2 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x$.
Berechnen Sie den Abstand zwischen Hoch- und Tiefpunkt.

$f'(x) = -2x^2 - 2x + 4$ und $f''(x) = -4x - 2$

$0 = f'(x) \quad \rightarrow \quad x_1 = -2 \quad$ und $x_2 = 1$

$f''(-2) = 6 > 0 \rightarrow$ bei $x = -2$ ist ein lokales Minimum;
$f''(1) = -6 < 0 \rightarrow$ bei $x = 1$ ist ein lokales Maximum

$f(-2) = -\frac{20}{3} \quad \Rightarrow \quad T\left(-2|-\frac{20}{3}\right)$

$f(1) = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad H\left(1|\frac{7}{3}\right)$

Abstand d (*distance*) berechnen über die Formel $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(-2-1)^2 + (-\frac{20}{3} - \frac{7}{3})^2} = \sqrt{90} \approx 9,49$ LE

Wiederholungsaufgaben (20.10.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE) – hilfsmittelfrei

In den nachfolgenden Aufgaben ist lediglich eine der fünf Auswahlmöglichkeiten richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

a) Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion $f : x \mapsto x \cdot (x-7) \cdot (x^2+4) \quad (x \in \mathbb{R})$?

☐	☐	☐	☐	☐
0	1	2	3	4

b) Welche Funktion h besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle?

☐	☐	☐	☐	☐
$h(x) = e^x$	$h(x) = \sin(x)$	$h(x) = \ln(x)$	$h(x) = \frac{1}{x} + x$	$h(x) = \sqrt{x}$
$(x \in \mathbb{R})$	$(x \in \mathbb{R})$	$(x \in \mathbb{R}, x > 0)$	$(x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$	$(x \in \mathbb{R}, x \geqq 0)$

c) Der größtmögliche Definitionsbereich D_f der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4 \cdot x - 4}$ ist

☐	☐	☐
$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 1\}$	$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leqq 1\}$	$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$
☐	☐	
$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geqq 1\}$	$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1\}$	

d) Die Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f : x \mapsto \ln(x)$ $(x \in D_f)$ hat an der Stelle $x = 1$ den Anstieg

☐	☐	☐	☐	☐
-1	0	$\frac{1}{e}$	1	e

e) Die erste Ableitungsfunktion g' der Funktion g mit $g(x) = -\dfrac{6}{x^3}$ $(x \in D_g)$ kann beschrieben werden durch:

☐	☐	☐	☐	☐
$g'(x) = -\frac{2}{x^2}$	$g'(x) = \frac{3}{x^2}$	$g'(x) = \frac{18}{x^2}$	$g'(x) = -\frac{2}{x^4}$	$g'(x) = \frac{18}{x^4}$

f) Gegeben ist die Funktion k mit $k(x) = 2 \cdot x \cdot (x+4)^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Welche Nullstellen besitzt k?

☐	☐	☐	☐	☐
$x_1 = -4$	$x_1 = -2$	$x_1 = -4$	$x_1 = -4$	$x_1 = 0$
$x_2 = -2$	$x_2 = 0$	$x_2 = 4$	$x_2 = 0$	$x_2 = 4$
$x_3 = 4$	$x_3 = 2$			

Aufgabe 2 (4 BE) – hilfsmittelfrei

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + x - 2$ $(x \in \mathbb{R})$

Es werden die Tangenten in den beiden Schnittpunkten des Graphen der Funktion f mit der x-Achse betrachtet.
Untersuchen Sie, ob sich die Tangenten orthogonal schneiden.

Aufgabe 3 (3 BE) – hilfsmittelfrei

Gegeben ist die Funktion h mit $y = h(x) = x^2 + 2 \cdot x - 3$ $(x \in \mathbb{R})$

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P\,(0|h(0))$ und $Q\,(2|h(2))$.

Ermitteln Sie die Stelle x, an der die Tangente an den Graphen von h parallel zur Geraden g verläuft.

Aufgabe 4 (5 BE) – hilfsmittelfrei

Der Graph der Funktion s mit $s(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ besitzt genau einen Wendepunkt W.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion s in diesem Wendepunkt W.

Aufgabe 5 (4 BE) – hilfsmittelfrei

Der Graph der Funktion r mit $r(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$ $(x \in \mathbb{R})$ besitzt genau einen Wendepunkt W.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion r in diesem Wendepunkt W.

Wiederholungsaufgaben (20.10.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE) – hilfsmittelfrei

In den nachfolgenden Aufgaben ist lediglich eine der fünf Auswahlmöglichkeiten richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

a) Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion $f : x \mapsto x \cdot (x-7) \cdot (x^2+4) \quad (x \in \mathbb{R})$?

☐	☐	×	☐	☐
0	1	2	3	4

b) Welche Funktion h besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle?

☐	☐	☐	×	☐
$h(x) = e^x$	$h(x) = \sin(x)$	$h(x) = \ln(x)$	$h(x) = \frac{1}{x} + x$	$h(x) = \sqrt{x}$
$(x \in \mathbb{R})$	$(x \in \mathbb{R})$	$(x \in \mathbb{R}, x > 0)$	$(x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$	$(x \in \mathbb{R}, x \geqq 0)$

c) Der größtmögliche Definitionsbereich D_f der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4 \cdot x - 4}$ ist

☐	☐	☐
$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 1\}$	$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leqq 1\}$	$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$
×	☐	
$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geqq 1\}$	$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1\}$	

d) Die Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f : x \mapsto \ln(x)$ $(x \in D_f)$ hat an der Stelle $x = 1$ den Anstieg

☐	☐	☐	×	☐
-1	0	$\frac{1}{e}$	1	e

e) Die erste Ableitungsfunktion g' der Funktion g mit $g(x) = -\dfrac{6}{x^3}$ $(x \in D_g)$ kann beschrieben werden durch:

☐	☐	☐	☐	×
$g'(x) = -\frac{2}{x^2}$	$g'(x) = \frac{3}{x^2}$	$g'(x) = \frac{18}{x^2}$	$g'(x) = -\frac{2}{x^4}$	$g'(x) = \frac{18}{x^4}$

f) Gegeben ist die Funktion k mit $k(x) = 2 \cdot x \cdot (x+4)^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Welche Nullstellen besitzt k?

☐	☐	☐	×	☐
$x_1 = -4$	$x_1 = -2$	$x_1 = -4$	$x_1 = -4$	$x_1 = 0$
$x_2 = -2$	$x_2 = 0$	$x_2 = 4$	$x_2 = 0$	$x_2 = 4$
$x_3 = 4$	$x_3 = 2$			

Aufgabe 2 (4 BE) – hilfsmittelfrei

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + x - 2$ $(x \in \mathbb{R})$

Es werden die Tangenten in den beiden Schnittpunkten des Graphen der Funktion f mit der x-Achse betrachtet.
Untersuchen Sie, ob sich die Tangenten orthogonal schneiden.

Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Nullstellen, also $0 = x^2 + x - 2$ lösen und man erhält: $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$.

Für die Anstiege wird die erste Ableitung benötigt: $f'(x) = 2x + 1$.

Der Anstieg der Tangente an der Stelle $x = -2$ ist: $f'(-2) = -3$.
Dazu ist der senkrechte Anstieg: $\frac{1}{3}$.

Der Anstieg der Tangente an der Stelle $x = 1$ ist: $f'(1) = 3 \neq \frac{1}{3}$.

Daher schneiden sich die beiden Tangenten nicht orthogonal.

Aufgabe 3 (3 BE) – hilfsmittelfrei

Gegeben ist die Funktion h mit $y = h(x) = x^2 + 2 \cdot x - 3$ $(x \in \mathbb{R})$

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P\,(0|h(0))$ und $Q\,(2|h(2))$.

Ermitteln Sie die Stelle x, an der die Tangente an den Graphen von h parallel zur Geraden g verläuft.

$h(0) = -3$ und $h(2) = 5$, also ist $P(0|-3)$ und $Q(2|5)$.

Der Anstieg zwischen P und Q ist: $m = \dfrac{5-(-3)}{2-0} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Gesucht ist nun die Stelle, an welcher die Tangente an $h(x)$ den Anstieg $m = 4$ besitzt. Dazu wird die erste Ableitung gebildet: $h'(x) = 2x + 2$

$4 = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$. Damit ist die Stelle ermittelt.

Aufgabe 4 (5 BE) – hilfsmittelfrei

Der Graph der Funktion s mit $s(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ besitzt genau einen Wendepunkt W.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion s in diesem Wendepunkt W.

Wendepunkt ermitteln: $s'(x) = 6x^2 - 12x$, $s''(x) = 12x - 12$ und $s'''(x) = 12 \neq 0$

$0 = s''(x)$ bzw. $0 = 12x - 12 \Rightarrow x = 1$. Da $s'''(1) \neq 0$ ist, befindet sich bei $x = 1$ eine Wendestelle.

$s(1) = -4$ somit hat der Wendepunkt die Koordinaten $W(1|-4)$.

Anstieg der Wendetangente: $s'(1) = -6$

Aufstellen der Tangentengleichung: $y = m \cdot x + n \Rightarrow -4 = -6 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 2$.

Daher hat die Wendetangente die Gleichung: $y = -6x + 2$.

Aufgabe 5 (4 BE) – hilfsmittelfrei

Der Graph der Funktion r mit $r(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$ $(x \in \mathbb{R})$ besitzt genau einen Wendepunkt W.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion r in diesem Wendepunkt W.

Wendepunkt ermitteln: $r'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, $r''(x) = 6x - 12$ und $r'''(x) = 6 \neq 0$

$0 = r''(x)$ bzw. $0 = 6x - 12 \Rightarrow x = 2$. Da $r'''(2) \neq 0$ ist, befindet sich bei $x = 2$ eine Wendestelle.

$r(2) = 0$ somit hat der Wendepunkt die Koordinaten $W(2|0)$.

Anstieg der Wendetangente: $r'(2) = -1$

Aufstellen der Tangentengleichung: $y = m \cdot x + n \Rightarrow 0 = -1 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 2$.

Daher hat die Wendetangente die Gleichung: $y = -x + 2$.

Parameterfunktionen (08.11.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (14 BE) – ohne CAS

Leiten Sie die gegebenen Funktionen zweimal nach der Variable ab, die in der Funktionsgleichung steht.

a) $f(x) = (5x^2 + 3) \cdot (8x^4 - 3x^2 - 4)$

b) $f(x) = \sin(3x + 5) \cdot x^3$

c) $f(x) = e^{5x} \cdot 3 \cdot x^4$

d) $f(x) = 7 \cdot \sqrt[5]{(12x - 3)^{10}}$

e) $f(a) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

f) $f(b) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

g) $f(c) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

Aufgabe 2 (2 + 1 + 2 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Parameterfunktion $g_r(x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ mit $r \in \mathbb{R}; r \neq 0$

a) Weisen Sie nach, dass $g_r(x)$ punktsymmetrisch ist.

b) Geben Sie die Nullstellen von $g_2(x)$ an.

c) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$ sind.

d) Berechnen Sie die Extrempunkte (mit Art) in Abhängigkeit von r und den Wendepunkt von $g_r(x)$.

e) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ der Hochpunkt die Koordinaten $H\left(-\frac{2}{15} \mid \frac{8}{45}\right)$ besitzt.

f) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte für $r > 0$.

Aufgabe 3 (2 + 3 BE) – ohne CAS

Durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{ax}$ wird für jede positive Zahl a eine Funktion f_a definiert.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_a.

b) Zeigen Sie, dass die positive Nullstelle von f_a niemals eine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

Aufgabe 4 (3 + 2 BE) – ohne CAS

Gegeben ist die Parameterfunktion f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{x+a}$. Dabei sei a eine positive Zahl.

a) Leiten Sie die Gleichung derjenigen Funktion f_a der Schar her, deren Graph durch den Punkt $(-2| - 2)$ verläuft.

b) Weisen Sie nach, dass jede Funktion der Schar einen Graphen mit einem Tiefpunkt besitzt.

Aufgabe 5 (3 + 2 BE) – ohne CAS

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = x^3 - 2tx^2 + t^2x$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Wendestelle des Graphen von f_t.

b) Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 6 (2 + 3 BE) – ohne CAS

Für jedes positive reelle a ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = e^{a \cdot x^2} - e^a; \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $P_a\,(1 \mid f_a(1))$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt P_a.

Aufgabe 7 (2 + 3 BE) – ohne CAS

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4; \quad x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
Bestimmen Sie diesen Wert von a.

Aufgabe 8 (4 + 2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_k auf Extrem- und Wendepunkte. Skizzieren Sie den Graphen für $k = -2$ und $k = 2$.

b) Bestimmen Sie für $k > 0$ die Ortskurve der Tiefpunkte aller Funktionsgraphen.

c) Es sind $x_e \neq 0$ eine Extremstelle und $x_w \neq 0$ eine Wendestelle von f_k für $k > 0$.
Zeigen Sie: Das Verhältnis $\frac{x_e}{x_w}$ häng nicht von k ab. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Aussage.

Aufgabe 9 (6 BE)

Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = (e^x - t)^2$ und $t > 0$. Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurven der Extrempunkte und der Wendepunkte. Zeichnen Sie die Ortskurven zusammen mit einigen Graphen der Funktionsschar in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Parameterfunktionen (08.11.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (14 BE) – ohne CAS

Leiten Sie die gegebenen Funktionen zweimal nach der Variable ab, die in der Funktionsgleichung steht.

a) $f(x) = (5x^2 + 3) \cdot (8x^4 - 3x^2 - 4)$

$f'(x) = 10x \cdot (8x^4 - 3x^2 - 4) + (5x^2 + 3) \cdot (32x^3 - 6x)$
$f''(x) = 10 \cdot (8x^4 - 3x^2 - 4) + 10x \cdot (32x^3 - 6x) + 10x \cdot (32x^3 - 6x) + (5x^2 + 3) \cdot (96x^2 - 6)$

(Bemerkung: *Das könnte man auch ausmultiplizieren, aber kein Mensch hat Lust darauf.*)

b) $f(x) = \sin(3x + 5) \cdot x^3$

$f'(x) = 3 \cdot \cos(3x + 5) \cdot x^3 + 3 \cdot \sin(3x + 5) \cdot x^2$
$f''(x) = -9 \cdot \sin(3x + 5) \cdot x^3 + 9 \cdot \cos(3x + 5) \cdot x^2 + 9 \cdot \cos(3x + 5) \cdot x^2 + 6 \cdot \sin(3x + 5) \cdot x$

c) $f(x) = e^{5x} \cdot 3 \cdot x^4$

$f'(x) = 15 \cdot e^{5x} \cdot x^4 + 12 \cdot e^{5x} \cdot x^3 = 3 \cdot e^{5x} \cdot (5x^4 + 4x^3)$

$f''(x) = 15 \cdot e^{5x} \cdot (5x^4 + 4x^3) + 3 \cdot e^{5x} \cdot (20x^3 + 12x^2) = 3 \cdot e^{5x} \cdot (25x^4 + 40x^3 + 12x^2)$

d) $f(x) = 7 \cdot \sqrt[5]{(12x - 3)^{10}} = 7 \cdot (12x - 3)^2$

$f'(x) = 14 \cdot 12 \cdot (12x - 3) = 168 \cdot (12x - 3)$
$f''(x) = 168 \cdot 12 = 2016$

e) $f(a) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

$f'(a) = 12a^3b^7c^5 - 3 \cdot e^{3a-4b+2c}$

$f''(a) = 36a^2b^7c^5 - 9 \cdot e^{3a-4b+2c}$

f) $f(b) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

$f'(b) = 21a^4b^6c^5 + 4 \cdot e^{3a-4b+2c}$

$f''(b) = 126a^4b^5c^5 - 16 \cdot e^{3a-4b+2c}$

g) $f(c) = 3a^4b^7c^5 - e^{3a-4b+2c}$

$f'(c) = 15a^4b^7c^4 - 2 \cdot e^{3a-4b+2c}$

$f''(c) = 60a^4b^7c^3 - 4 \cdot e^{3a-4b+2c}$

Aufgabe 2 (2 + 1 + 2 + 6 + 2 BE)

Gegeben ist die Parameterfunktion $g_r(x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ mit $r \in \mathbb{R}; r \neq 0$

a) Weisen Sie nach, dass $g_r(x)$ punktsymmetrisch ist.

$g_r(x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x$

$g_r(-x) = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x) = -\frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 + 2x$

$-g_r(x) = -\left(\frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2 \cdot x\right) = -\frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 + 2 \cdot x$

Da $g_r(-x) = -g_r(x)$ gilt, ist der Graph von $g_r(x)$ punktsymmetrisch.

b) Geben Sie die Nullstellen von $g_2(x)$ an.

$g_2(x) = \frac{12}{10}x^3 - 2x$. Die Nullstellen sind: $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{5}{3}}$

c) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$ sind.

Für die Nullstelen gilt: $0 = \frac{3}{10} \cdot r^2 \cdot x^3 - 2x \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2 \cdot \sqrt{15}}{3r}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{3r}$

Da $x_2 = 0$ stets erfüllt ist und $g_r(x)$ nach Aufgabe a) punktsymmetrisch ist, genügt es, den Parameter r mithilfe der Gleichung

$$3 = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{3r}$$

zu bestimmen. Es folgt somit: $r = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{9}$

d) Berechnen Sie die Extrempunkte (mit Art) in Abhängigkeit von r und den Wendepunkt von $g_r(x)$.

$g_r'(x) = \frac{9}{10} \cdot r^2 \cdot x^2 - 2 \qquad g_r''(x) = \frac{9}{5} \cdot r^2 \cdot x \qquad g_r'''(x) = \frac{9}{5} \cdot r^2$

Extremstellen (notwendige Bedingung):

$0 = g_r'(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r}$, $x_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r}$

Extremstellen (Art):

$g_r''\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r}\right) = -\frac{6 \cdot \sqrt{5} \cdot r}{5} < 0 \quad \rightarrow \quad$ lokales Maximum bei $x_{\text{max}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r}$

$g_r''\left(\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r}\right) = \frac{6 \cdot \sqrt{5} \cdot r}{5} > 0 \quad \rightarrow \quad$ lokales Minimum bei $x_{\text{min}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r}$

Extrempunkte:

$g_r\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r}\right) = \frac{8 \cdot \sqrt{5}}{9r} \quad \Rightarrow \quad H\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r} \mid \frac{8 \cdot \sqrt{5}}{9r}\right)$

$g_r\left(\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r}\right) = -\frac{8 \cdot \sqrt{5}}{9r} \quad \Rightarrow \quad T\left(\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3r} \mid -\frac{8 \cdot \sqrt{5}}{9r}\right)$

Diese Betrachtung gilt für $r > 0$. Bei $r < 0$ ist es genau anders herum.

Wendestelle (notwendige Bedingung):

$0 = g_r''(x) \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Überprüfung Wendestelle:

$g_r'''(0) = \frac{9}{5} \cdot r^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ Wendestelle bei $x_W = 0$

Wendepunkt:

$g_r(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0|0)$

e) Bestimmen Sie, für welches $r > 0$ der Hochpunkt die Koordinaten $H\left(-\frac{2}{15} \mid \frac{8}{45}\right)$ besitzt.

$-\frac{2}{15} = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r} \qquad \Rightarrow \qquad r = 5 \cdot \sqrt{5}$

f) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte für $r > 0$.

Für den Hochpunkt gilt: $x = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3r} \Leftrightarrow r = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3x}$ und daher ist $y = \dfrac{8 \cdot \sqrt{5}}{9 \cdot \left(-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3x}\right)} = -\frac{4}{3} \cdot x$

Aufgrund der Punktsymmetrie, liegt der Tiefpunkt auch auf dieser Geraden. Dies könnte auch rechnerisch nachgewiesen werden.

Aufgabe 3 (2 + 3 BE)

Durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{ax}$ wird für jede positive Zahl a eine Funktion f_a definiert.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_a.

Da e^{ax} nie Null sein kann, egal was für a oder x eingesetzt wird, muss gelten:

$x^2 - a^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -a$ und $x_2 = a$

b) Zeigen Sie, dass die positive Nullstelle von f_a niemals eine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

$f_a'(x) = 2x \cdot e^{ax} + (x^2 - a^2) \cdot a \cdot e^{ax}$

Also ist $f_a'(a) = 2a \cdot e^{a^2} \neq 0$, weil a eine positive Zahl ist.

Aufgabe 4 (3 + 2 BE)

Gegeben ist die Parameterfunktion f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{x+a}$. Dabei sei a eine positive Zahl.

a) Leiten Sie die Gleichung derjenigen Funktion f_a der Schar her, deren Graph durch den Punkt $(-2| - 2)$ verläuft.

$f_a(-2) = -2$ gilt aufgrund des Punktes, also ist:

$-2 \cdot e^{-2+a} = -2 \qquad \overset{:(-2)}{\Rightarrow} \qquad e^{-2+a} = 1$

Es gilt für jede reelle Zahl: $a^0 = 1$, also muss im Exponenten eine Null herauskommen. Daher ist $a = 2$.

Nun soll $f_2(x) = x \cdot e^{x+2}$ abgeleitet werden. Es ist $f_2'(x) = e^{x+2} + x \cdot e^{x+2} = (1 + x) \cdot e^{x+2}$.

b) Weisen Sie nach, dass jede Funktion der Schar einen Graphen mit einem Tiefpunkt besitzt.

Es ist $f_a'(x) = e^{x+a} + x \cdot e^{x+a} = (1 + x) \cdot e^{x+a}$

$0 = (1 + x) \cdot e^{x+a} \qquad \Rightarrow \qquad x = -1.$

Zur Bestimmung der Art des Extremums muss $x = -1$ nun in die zweite Ableitung eingesetzt werden. Es ist:

$f_a''(x) = e^{x+a} + (1 + x) \cdot e^{x+a} \qquad \Rightarrow \qquad f_a''(-1) = e^{-1+a} > 0$, also ist die Extremstelle immer ein lokales Minimum.

Aufgabe 5 (2 + 3 BE)

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = x^3 - 2tx^2 + t^2x$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Wendestelle des Graphen von f_t.

$f_t'(x) = 3x^2 - 4tx + t^2$
$f_t''(x) = 6x - 4t$
$f_t'''(x) = 6$

Wendestelle bestimmen: $0 = 6x - 4t \quad \Leftrightarrow \quad 4t = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}t$ (ist Wendestelle, weil $f_t'''\left(\frac{2}{3}t\right) = 6 \neq 0$ ist.

b) Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

$f_t(x) = x \cdot (x^2 - 2tx + t^2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

Für x_2 und x_3 ist $0 = x^2 - 2tx + t^2$ mit der p-q-Formel zu lösen.

$x_{2/3} = t \pm \sqrt{t^2 - t^2} = t$

Also hat $f_t(x)$ nur eine Nullstelle, wenn $t = 0$ ist und sonst zwei Nullstellen.

Bemerkung: Das hätte man auch sehen können, wenn man binomische Formeln kann: $x \cdot (x^2 - 2tx + t^2) = x \cdot (x - t)^2$

Aufgabe 6 (2 + 3 BE)

Für jedes positive reelle a ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = e^{a \cdot x^2} - e^a; \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $P_a\,(1 \mid f_a(1))$.

$f_a(1) = e^{a \cdot 1^2} - e^a = e^a - e^a = 0$, also $P_a(1|0)$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt P_a.

$f_a'(x) = 2x \cdot e^{a \cdot x^2}$

$f_a'(1) = 2 \cdot e^a$

$y = m \cdot x + n \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot e^a \cdot 1 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = -2 \cdot e^a$

$t_{P_a}(x) = 2 \cdot e^a \cdot x - 2 \cdot e^a = 2 \cdot e^a \cdot (x - 1)$

Aufgabe 7 (2 + 3 BE)

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4; \quad x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

$f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4 = x^4 \cdot (a \cdot x^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad$ eine Nullstelle ist also daher $x_1 = 0$.

$0 = a \cdot x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = x^2$

$\Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$ und $x_3 = \sqrt{\frac{1}{a}}$

Für $a < 0$ sind beide Wurzeln undefiniert und dann hätte $f_a(x)$ nur die Nullstelle $x_1 = 0$. Daher hat $f_a(x)$ mehr als eine Nullstelle für $a > 0$.

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
Bestimmen Sie diesen Wert von a.

$f_a'(x) = 6ax^5 - 4x^3$
$f_a''(x) = 30ax^4 - 12x^2$

$0 = 6ax^5 - 4x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2x^3 \cdot (3ax^2 - 2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

$0 = 3ax^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3a} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3a}}$ und $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3a}}$

Es muss also gelten $\frac{2}{3a} = 1$. Wenn man den Bruch umschreibt, steht dort $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} = 1$. Damit das gilt, muss $a = \frac{2}{3}$ sein, denn $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$.

Aufgabe 8 (4 + 2 + 3 BE)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_k auf Extrem- und Wendepunkte. Skizzieren Sie den Graphen für $k = -2$ und $k = 2$.

$f_k'(x) = 4x^3 - 2k \cdot x \qquad f_k''(x) = 12x^2 - 2k \qquad f_k'''(x) = 24x$

Für $k = 0$ ist die Funktionsgleichung $f_0(x) = x^4$ und besitzt ein globales Minimum bei $T(0 \mid 0)$, jedoch keinen Wendepunkt.

Extrempunkte:

$0 = f_k'(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{\frac{k}{2}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{k}{2}}$

x_1 und x_3 sind also nur definiert für $k > 0$.

$f_k''(0) = -2k$ Daher ist bei $x = 0$ ein Maximum für $k > 0$ und ein Minimum für $k \leqq 0$.
$f_k(0) = 0 \quad \rightarrow \quad$ Das Extremum hat die Koordinaten $E_1(0 \mid 0)$

$f_k''\left(\pm\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = 4k > 0$ also sind an beiden Stellen jeweils Minima.

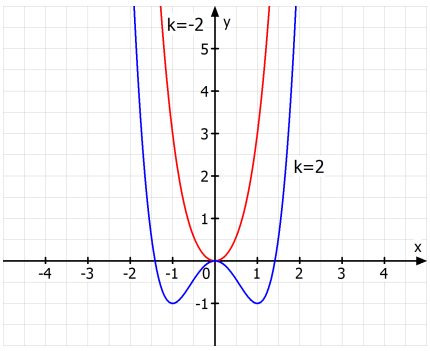
$f_k\left(\pm\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = -\frac{k^2}{4} \quad \rightarrow \quad E_2\left(-\sqrt{\frac{k}{2}} \mid -\frac{k^2}{4}\right)$ und $E_3\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \mid -\frac{k^2}{4}\right)$

Wendepunkte:

$0 = f_k''(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{\frac{k}{6}}$ und $x_2 = \sqrt{\frac{k}{6}}$. Also existieren Wendepunkte grundsätzlich nur für $k > 0$.

$f_k'''\left(-\sqrt{\frac{k}{6}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{k}{6}} \neq 0$ (analog für x_2). Daher existieren die Wendepunkte wirklich für $k > 0$

$f_k\left(\pm\sqrt{\frac{k}{6}}\right) = -\frac{5k^2}{36} \quad \rightarrow \quad W_1\left(-\sqrt{\frac{k}{6}} \mid -\frac{5k^2}{36}\right)$ und $W_2\left(\sqrt{\frac{k}{6}} \mid -\frac{5k^2}{36}\right)$



b) Bestimmen Sie für $k > 0$ die Ortskurve der Tiefpunkte aller Funktionsgraphen.

$x = \sqrt{\frac{k}{2}} \quad \Rightarrow \quad k = 2 \cdot x^2 \qquad y = -\frac{(2x^2)^2}{4} = -x^4$

c) Es sind $x_e \neq 0$ eine Extremstelle und $x_w \neq 0$ eine Wendestelle von f_k für $k > 0$.
Zeigen Sie: Das Verhältnis $\frac{x_e}{x_w}$ häng nicht von k ab. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Aussage.

$$\frac{x_e}{x_w} = \frac{\sqrt{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\frac{k}{6}}} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_e = \sqrt{3} \cdot x_w$$

Also ist die Extremstelle immer um ein Vielfaches größer als die Wendestelle.

Aufgabe 9 (6 BE)

Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = (e^x - t)^2$ und $t > 0$. Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurven der Extrempunkte und der Wendepunkte. Zeichnen Sie die Ortskurven zusammen mit einigen Graphen der Funktionsschar in ein gemeinsames Koordinatensystem.

$f_t'(x) = 2 \cdot (e^x - t) \cdot e^x$ $\qquad$ $f_t''(x) = 2 \cdot e^x \cdot (2 \cdot e^x - t)$ $\qquad$ $f_t'''(x) = 2 \cdot e^x \cdot (4 \cdot e^x - t)$

$0 = f_t'(x) \quad \Rightarrow \quad x = \ln(t)$ $\qquad$ $f_t''(\ln(t)) = 2 \cdot t^2 > 0$ also ist bei $x = \ln(t)$ ein lokales Minimum

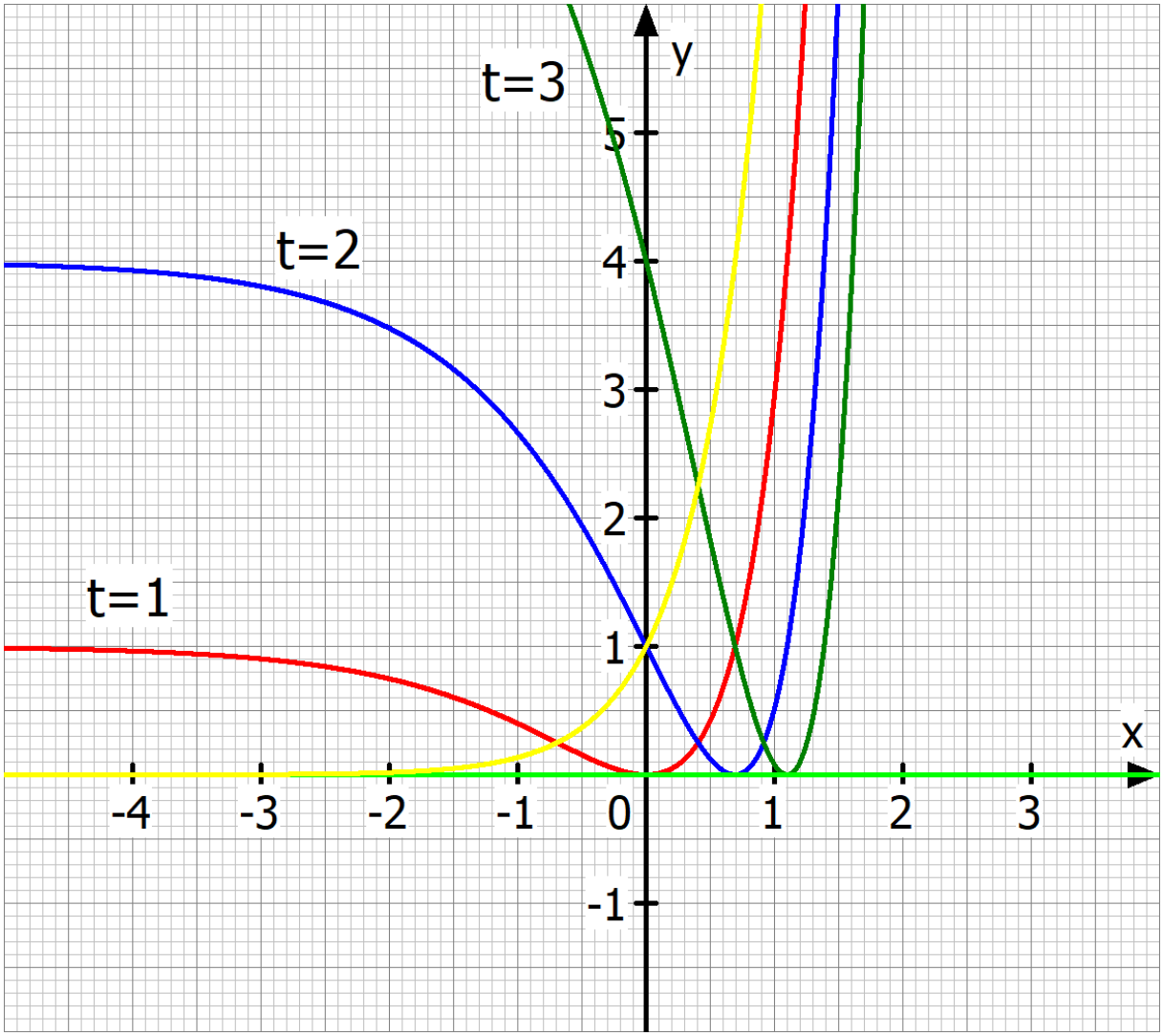
$f_t(\ln(t)) = 0 \quad \rightarrow \quad T(\ln(t) \mid 0)$

$0 = f_t''(x) \quad \Rightarrow \quad x = \ln\left(\frac{t}{2}\right)$ $\qquad$ $f_t'''\left(\ln\left(\frac{t}{2}\right)\right) = t^2 \neq 0$ also existiert die Wendestelle.

$f_t\left(\ln\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{t^2}{4} \quad \rightarrow \quad W\left(\ln\left(\frac{t}{2}\right) \mid \frac{t^2}{4}\right)$

Ortskurve der Extrempunkte: $y = 0$ (weil alle Extrempunkte auf der x-Achse liegen.

Ortskurve der Wendepunkte: $x = \ln\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow t = 2 \cdot e^x \quad \rightarrow \quad y = \frac{(2 \cdot e^x)^2}{4} = (e^x)^2 = e^{2x}$



Hier ist die neongrüne Linie die Ortskurve der Tiefpunkte und die gelbe Linie die Ortskurve der Wendepunkte.

Aufgaben zu Funktionsbestimmung (06.12.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (je 3 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung eines Polynoms dritten Grades, dessen Graph die nachfolgenden Eigenschaften besitzt und skizzieren Sie diese:

a) ... hat im Punkt $T(1|0)$ einen Tiefpunkt und im Punkt $H(3|4)$ einen Hochpunkt.

b) ... Koordinatenursprung ist Wendepunkt, der Punkt $H(3|2)$ ist Hochpunkt.

c) ... im Wendepunkt $W(2|4)$ hat die Wendetangente die Steigung -3, außerdem geht der Graph durch den Ursprung.

d) ... geht durch den Koordinatenursprung und hat in $S(2|1)$ einen Sattelpunkt.

e) ... verläuft durch die Punkte $P(0|-5)$ sowie $Q(1|0)$ und berührt die x-Achse im Punkt $R(5|0)$.

f) ... im Punkt $P(1|4)$ eine Tangente parallel zur 1. Winkelhalbierenden und in $Q(0|2)$ eine Tangente Parallel zur x-Achse.

g) ... verläuft durch den Koordinatenursprung und besitzt den Wendepunkt $W(1|-2)$. Die Wendetangente schneidet die x-Achse in $Q(2|0)$.

Aufgabe 2 (je 3 BE)

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion 5. Grades, welche punktsymmetrisch zum Ursprung mit Ursprungsgerade $y = 7 \cdot x$ ist sowie einen Wendepunkt $W(1|0)$ besitzt.

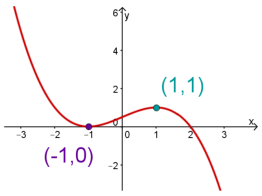
b) Bestimmen Sie die Gleichung einer zur y-Achse achsensymmetrischen Funktion 4. Grades, deren Wendetangente im Ursprung mit einer Steigung 1 liegt und im Punkt $P(2|4)$ hat die Funktion ein Extremum.

Aufgabe 3 – ohne CAS (5 BE)

Der Graph einer quadratischen Funktion f verläuft durch den Koordinatenursprung. Die Tangente an diesen Graphen im Punkt $(2|f(2))$ hat die Gleichung $y = 4x - 2$. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

Aufgabe 4 (3 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der dargestellten Funktion.[1]



[1] Quelle: `https://de.serlo.org/mathe/2157/steckbriefaufgabe`

Aufgaben zu Funktionsbestimmung (06.12.2021)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (12 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung eines Polynoms dritten Grades, dessen Graph die nachfolgenden Eigenschaften besitzt und skizzieren Sie diese: Es ist $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ und $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ und $f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

a) ... hat im Punkt $T(1|0)$ einen Tiefpunkt und im Punkt $H(3|4)$ einen Hochpunkt.

Die Bedingungen sind $f(1) = 0$ (Punkt), $f'(1) = 0$ (Tiefpunkt), $f(3) = 4$ (Punkt) und $f'(3) = 0$ (Hochpunkt).

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

b) ... Koordinatenursprung ist Wendepunkt, der Punkt $H(3|2)$ ist Hochpunkt.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f''(0) = 0$ (Wendepunkt), $f(3) = 2$ (Punkt) und $f'(3) = 0$ (Hochpunkt).

$f(x) = -\frac{1}{27}x^3 + x$

c) ... im Wendepunkt $W(2|4)$ hat die Wendetangente die Steigung -3, außerdem geht der Graph durch den Ursprung.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f(2) = 4$ (Punkt), $f''(2) = 0$ (Wendepunkt) und $f'(2) = -3$ (Steigung der Wendetangente).

$f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x$

d) ... geht durch den Koordinatenursprung und hat in $S(2|1)$ einen Sattelpunkt.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f(2) = 1$ (Punkt), $f'(2) = 0$ (Sattelpunkt) und $f''(2) = 0$ (Sattelpunkt).

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$

e) ... verläuft durch die Punkte $P(0|-5)$ sowie $Q(1|0)$ und berührt die x-Achse im Punkt $R(5|0)$.

Die Bedingungen sind $f(0) = -5$ (Punkt), $f(1) = 0$ (Punkt), $f(5) = 0$ (Punkt) und $f'(5) = 0$ (berührt die x-Achse).

$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{11}{5}x^2 + 7x - 5$

f) ... im Punkt $P(1|4)$ eine Tangente parallel zur 1. Winkelhalbierenden und in $Q(0|2)$ eine Tangente Parallel zur x-Achse.

Die Bedingungen sind $f(1) = 4$ (Punkt), $f(0) = 2$ (Punkt), $f'(1) = 1$ (parallel zur 1. Winkelhalbierenden) und $f'(0) = 0$ (parallel zur x-Achse).

$f(x) = -3x^3 + 5x^2 + 2$

g) ... verläuft durch den Koordinatenursprung und besitzt den Wendepunkt $W(1|-2)$. Die Wendetangente schneidet die x-Achse in $Q(2|0)$.

Die Bedingungen sind $f(0) = 0$ (Punkt), $f(1) = -2$ (Punkt), $f''(1) = 0$ (Wendepunkt)

Die letzte Information ist schwieriger. Wir können den Anstieg der Wendetangente durch den Differenzenquotienten ermitteln:

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-(-2)}{2-1} = 2 = f'(1)$ (Anstieg der Wendetangente)

$f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 10x$

Aufgabe 2 (je 3 BE)

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion 5. Grades, welche punktsymmetrisch zum Ursprung mit Ursprungsgerade $y = 7 \cdot x$ ist sowie einen Wendepunkt $W(1|0)$ besitzt.

$f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot x$ (aufgrund der Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

$f'(x) = 5 \cdot a \cdot x^4 + 3 \cdot b \cdot x^2 + c$

$f''(x) = 20 \cdot a \cdot x^3 + 6 \cdot b \cdot x$

Es gelten die drei Gleichungen:

$I \quad f'(0) = 7$ (Anstieg der Ursprungsgeraden)
$II \quad f(1) = 0$ (Koordinaten des Wendepunktes)
$III \quad f''(1) = 0$ (Eigenschaften des Wendepunktes)

$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot x^5 - 10 \cdot x^3 + 7 \cdot x$

b) Bestimmen Sie die Gleichung einer zur y-Achse achsensymmetrischen Funktion 4. Grades, deren Wendetangente im Ursprung mit einer Steigung 1 liegt und im Punkt $P(2|4)$ hat die Funktion ein Extremum.

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ (aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse)

$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$

Statt 3 Informationen gelten folgende 5 Gleichungen:

$I \quad f(0) = 0$ (Wendepunkt im Ursprung)
$II \quad f''(0) = 0$ (Eigenschaften des Wendepunktes)
$III \quad f'(0) = 1$ (Anstieg der Wendetangente)
$IV \quad f(2) = 4$ (Punktkoordinaten)
$V \quad f'(2) = 4$ (Eigenschaften des Extremums)

$\Rightarrow$ keine Lösung möglich

Wenn die Funktion nicht achsensymmetrisch ist, wäre $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{4}x^3 + x$

Aufgabe 3 – ohne CAS (5 BE)

Der Graph einer quadratischen Funktion f verläuft durch den Koordinatenursprung. Die Tangente an diesen Graphen im Punkt $(2|f(2))$ hat die Gleichung $y = 4x - 2$. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

Es ist $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Der Punkt P liegt auch auf der Tangente. Um also die y-Koordinate zu bestimmen, wird der x-Wert des Punktes in die Tangentengleichung eingesetzt: $y = 4 \cdot 2 - 2 = 6 \quad \rightarrow \quad P(2|6)$.

Nun können die drei Gleichungen aufgestellt werden:

Durch den Koordinatenursprung gilt: $f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$

Also ist die Gleichung für f nur noch $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ und $f'(x) = 2a \cdot x + b$

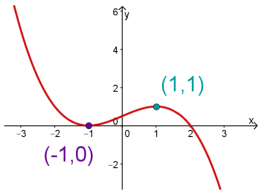
Punkt $P(2|6)$: $f(2) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2b = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + b = 3$ (I)

Anstieg in $P(2|6)$ ist 4: $f'(2) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + b = 4$ (II)

Nun muss das Gleichungssystem gelöst werden. Aus (I) lässt sich b gut umstellen: $b = 3 - 2a$. Dies wird in (II) eingesetzt:
$4a + 3 - 2a = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$
$b = 3 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad b = 3 - 1 = 2 \qquad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

Aufgabe 4 (3 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der dargestellten Funktion.[1]



Wahrscheinlich ist dies eine Funktion dritten Grades, also gelten alle Bedingungen wie in Aufgabe 1.

Die Gleichungen sind:

$f(-1) = 0$ und $f(1) = 1$ (aufgrund der beiden Punktkoordinaten).

$f'(-1) = 0$ und $f'(1) = 0$ (aufgrund der Eigenschaften von Hoch- und Tiefpunkt).

Daher ist $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

[1] Quelle: `https://de.serlo.org/mathe/2157/steckbriefaufgabe`

Extremwertprobleme (10.01.2022)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Aus einem 36 cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Bestimmen Sie die Kantenlängen unter der Bedingung, dass das Volumen maximal wird.

Aufgabe 2 (6 BE)

Ein rechteckiges Plakat hat eine Fläche von 35 dm^2. Es wird so bedruckt, dass die Ränder an den Seiten jeweils 4 cm, oben und unten jeweils 5 cm betragen. Bestimmen Sie die Maße des Plakates mit der größten bedruckbaren Fläche.

Aufgabe 3 (6 + 2 BE)

Eine 400-m-Laufbahn in einem Sportstadion besteht aus zwei Halbkreisen, die durch zwei parallele Strecken verbunden sind.

a) Wie müssen der Radius r der Halbkreise und die Länge x der parallelen Strecken gewählt werden, damit die mittlere Rechteckfläche einen maximalen Flächeninhalt hat?

b) Recherchieren Sie, ob Stadien in der Nähe Ihres Wohnortes diese Abmessungen besitzen.

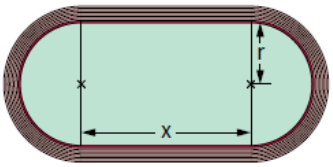


Abbildung 1: Elemente der Mathematik. Sachsen 11, S. 136

Aufgabe 4 (6 BE)

Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Querschnitts ist durch $U = 10$ m fest vorgegeben. Wie muss das Gewölbe gestaltet werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?

Aufgabe 5 (6 BE)

Von einer Kaffeesorte werden bei einem Preis von 20 € für 1 kg im Monat 10.000 kg verkauft. Eine Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung von 0,02 € je kg zu einer Absatzsteigerung von jeweils 100 kg im Monat führen würde. Bei welchem Verkaufspreis wäre der Gewinn maximal, wenn für 1 kg Kaffee der Selbstkostenpreis 14 € beträgt?

Aufgabe 6 (6 BE)

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r. Rollt man einen Kreissektor mit Mittelpunktswinkel α zusammen, entsteht ein Kegel. Bestimmen Sie α so, dass das Volumen des Kegels maximal wird. (Vergleichen Sie mit einer Filtertüte für Kaffee.)

Aufgabe A1.1.3 Abitur 2008

Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{18}x^3 - 2x \quad \text{und} \quad f_2(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 0,5x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Gegeben sind die Punkte $Q\,(u|f_1(u))$ und $R\,(u|f_2(u))$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 3, u \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Abstand der Punkte Q und R für $u = 1$

Ermitteln Sie rechnerisch den Wert für u so, dass der Abstand zwischen den Punkten Q und R maximal wird.

Kurzlösung: Abstand für $u = 1$: LE $u =$

Extremwertprobleme und Funktionsgraphen (Dreiecke)

H. Wuschke

Aufgabe A1.2.3 Abitur 2008 mit CAS

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Ihr Graph ist G.

Ein Dreieck OAB entsteht durch den Koordinatenursprung O, den Schnittpunkt A des Graphen mit dem positiven Teil der x-Achse und den Punkt B.
Der Punkt B liegt im ersten Quadranten auf G.

Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

Aufgabe A1.3 Abitur 2012

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Graph heißt F.

Die Punkte $R\left(-u|f(-u)\right), S(0|0)$ und $T\left(u|f(u)\right)$ mit $0 < u < 1$ bestimmen ein Dreieck.
Berechnen Sie den Wert von u so, dass die Dreiecksfläche maximal wird.

Aufgabe A1.3.3 Abitur 2018

Gegeben ist die für alle reellen Zahlen x mit $-2 \leqq x \leqq 8$ definierte Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$$

Für jeden Wert von a mit $0 \leqq a < 7; a \in \mathbb{R}$ liegt ein Dreieck ABC mit $A(a|0), B(7|0)$ und $C\left(a|f(a)\right)$ im ersten Quadranten.
Fertigen Sie zu diesem Sachverhalt eine Skizze an.
Begründen Sie, dass es sinnvoll ist, für a den Wert 7 auszuschließen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass die Fläche des Dreiecks ABC möglichst groß wird.

Kurzlösung A1.2.3: maximaler Flächeninhalt: FE $B($ | $)$

Kurzlösung A1.3: maximaler Flächeninhalt: FE $u =$

Kurzlösung A1.3.3: maximaler Flächeninhalt: FE $C($ | $)$

Aufgabe A1.4 Abitur 2010

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{27}x^3 + 3x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Der Graph von f ist K.

Auf dem Graphen K ist ein Punkt $P\,(r|f(r))$ mit $r \in \mathbb{R}, 0 < r < 9$ gegeben.
Durch P werden Parallelen zu den Koordinatenachsen gelegt.
Diese Parallelen und die Koordinatenachsen begrenzen ein Rechteck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal wird.
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Aufgabe A1.2.2 Abitur 2013

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Durch die Punkte $O(0|0), P(u|0), Q\,(u|f(u))$ und $R\,(0|f(u))$ mit $0 < u < 5$ wird ein Rechteck eindeutig festgelegt.
Bestimmen Sie den Wert von u so, dass der Flächeninhalt des Rechteckes maximal wird.
Geben Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks an.

Kurzlösung A1.4: maximaler Flächeninhalt: FE $P($ | $)$

Kurzlösung A1.2.2: maximaler Flächeninhalt: FE $u =$

Extremwertprobleme und Funktionsgraphen (Reckteckumfang)

H. Wuschke

Aufgabe B1.2 Abitur 2009

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = e^{-2x+1} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Der Graph von f ist K.

Auf dem Graphen K ist ein Punkt $P(r|s)$ mit $r > 0$ gegeben.
Durch P werden Parallelen zu den Koordinatenachsen gelegt.
Diese Parallelen und die Koordinatenachsen begrenzen ein Rechteck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass der Umfang dieses Rechtecks minimal wird.
Geben Sie den minimalen Umfang an.

Aufgabe A1.5 Abitur 2011

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

Der Graph von f ist K.

Auf K existiert ein Punkt $Q\,(r|f(r))$ mit $r \in \mathbb{R}, r > 0$.
Durch Q werden Parallelen zu den Koordinatenachsen gelegt.
Diese Parallelen und die Koordinatenachsen bilden ein Rechteck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von Q so, dass der Umfang dieses Rechtecks minimal wird.
Berechnen Sie den minimalen Umfang.

Kurzlösung A1.2: minimaler Umfang: LE $P($ | $)$

Kurzlösung A1.5: minimaler Umfang: LE $Q($ | $)$

Extremwertprobleme (16.01.2020)

H. Wuschke

Aufgabe 1 (6 BE)

Aus einem 36 cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Bestimmen Sie die Kantenlängen unter der Bedingung, dass das Volumen maximal wird.

Extremalbedingung: $V(a,b) = a^2 \cdot b$ soll maximiert werden.

Nebenbedingung: $8a + 4b = 36$ (Alle Kanten zusammen sind 36 cm lang.)
$4b = 36 - 8b \Leftrightarrow b = 9 - 2a$

Zielfunktion: $V(a) = a^2 \cdot (9 - 2a) = 9a^2 - 2a^3$

Hochpunkt der Zielfunktion graphisch bestimmen ergibt: $H(3|27)$, das heißt für $a = 3$ cm hat der Quader ein Volumen von 27cm^3.

Berechnung von b: $b = 9 - 2a \overset{a=3}{\Rightarrow} b = 9 - 6 = 3$, somit hat b auch die Kantenlänge 3cm und somit ist der Quader ein Würfel mit Kantenlänge 3 cm.

Aufgabe 2 (6 BE)

Ein rechteckiges Plakat hat eine Fläche von 35 dm^2. Es wird so bedruckt, dass die Ränder an den Seiten jeweils 4 cm, oben und unten jeweils 5 cm betragen. Bestimmen Sie die Maße des Plakates mit der größten bedruckbaren Fläche.

Vorbetrachtung: $35\ \text{dm}^2 = 3.500\ \text{cm}^2$

Extremalbedingung: $A(a,b) = (a-8) \cdot (b-10)$ soll maximal werden.

Nebenbedingung: $a \cdot b = 3.500 \Leftrightarrow a = \frac{3.500}{b}$

Zielfunktion: $A(b) = \left(\frac{3.500}{b} - 8\right) \cdot (b - 10) = 3.500 - 8b - \frac{3.500}{b} + 80 = -8b - \frac{3.500}{b} + 3580$

Zielfunktion mithilfe des CAS ableiten: $A'(b) = -8 + \frac{3500}{x^2}$ $\qquad A''(b) = -\frac{7000}{b^3}$

Hochpunkt berechnen: $A'(b) = 0 \rightarrow b_1 = -\frac{5 \cdot \sqrt{70}}{2}$ (entfällt, da < 0) und $b_2 = \frac{5 \cdot \sqrt{70}}{2}$

hinreichende Bedingung: $A''\left(\frac{5 \cdot \sqrt{70}}{2}\right) = -40 \cdot \sqrt{70} < 0 \rightarrow$ bei $b = \frac{5 \cdot \sqrt{70}}{2}$ ist ein lokales Maximum.

Hochpunktkoordinaten: $A\left(\frac{5 \cdot \sqrt{70}}{2}\right) = 3580 - 40 \cdot \sqrt{70} \approx 3.245,34 \rightarrow H(20,92|3.245,34)$

Seitenlänge von a: $a = \dfrac{3.500}{b} \overset{b \approx 20,92}{\Rightarrow} a \approx 167,33$

Das Plakat hat eine Breite von ca. 167,33 cm und eine Höhe von 20,92 cm. Das sieht vielleicht etwas seltsam aus, weil es eher ein Streifen ist, aber so ist es nunmal bei dem maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe 3 (6 + 2 BE)

Eine 400-m-Laufbahn in einem Sportstadion besteht aus zwei Halbkreisen, die durch zwei parallele Strecken verbunden sind.

a) Wie müssen der Radius r der Halbkreise und die Länge x der parallelen Strecken gewählt werden, damit die mittlere Rechteckfläche einen maximalen Flächeninhalt hat?

b) Recherchieren Sie, ob Stadien in der Nähe Ihres Wohnortes diese Abmessungen besitzen.

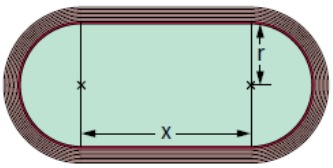


Abbildung 1: Elemente der Mathematik. Sachsen 11, S. 136

Extremalbedingung: $A(r,x) = 2r \cdot x$ soll maximal werden.

Nebenbedingung: $2x + 2\pi r = 400 \Leftrightarrow x + \pi r = 200 \Leftrightarrow x = 200 - \pi r$

Zielfunktion: $A(r) = 2r \cdot (200 - \pi r) = 400r - 2\pi r^2$

Zielfunktion ableiten: $A'(r) = 400 - 4\pi r \qquad A''(r) = -4\pi < 0 \rightarrow$ es liegt ein Maximum vor.

Hochpunkt berechnen: $A'(r) = 0 \rightarrow r = \frac{100}{\pi}$

Hochpunktkoordinaten: $A\left(\frac{100}{\pi}\right) = \frac{20.000}{\pi} \approx 6.366,20 \rightarrow H(31,83|6.366,20)$

Seitenlänge von x: $x = 200 - \pi r \overset{r=\frac{100}{\pi}}{\Rightarrow} x = 100$

Bei einer Abmessung von 100 m Breite und ca. 63,66 m Höhe hat das mittlere Rechteck eine maximale Fläche von ca. 6.366,20 m^2.

Aufgabe b) eigene Recherche.

Aufgabe 4 (6 BE)

Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Querschnitts ist durch $U = 10$ m fest vorgegeben. Wie muss das Gewölbe gestaltet werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?

Zielfunktion: $Q = 2 \cdot r \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$
Nebenbedingung: $2r + 2a + \pi \cdot r = 10$
$Q(r) = 10r - \left(2 + \frac{1}{2} \cdot \pi\right) \cdot r^2$
$r = \frac{10}{4+\pi} \approx 1,40 \text{ m} \approx a$

Aufgabe 5 (6 BE)

Von einer Kaffeesorte werden bei einem Preis von 20 € für 1 kg im Monat 10.000 kg verkauft. Eine Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung von 0,02 € je kg zu einer Absatzsteigerung von jeweils 100 kg im Monat führen würde. Bei welchem Verkaufspreis wäre der Gewinn maximal, wenn für 1 kg Kaffee der Selbstkostenpreis 14 € beträgt?

$f(x) = (20 - 0,02 \cdot x - 14) \cdot (10.000 + 100 \cdot x) \qquad \rightarrow \qquad x = 100 \qquad \rightarrow \qquad 18$ €